Lösningar, Tenta 2016-12-20, LMA017

1) Beräkna längden av kurvan

$$\mathbf{r}(t) = (5,\ t^2,\ 2t^3)$$

där $0 \le t \le 1$.

Längd av kurva C: $\int_C ds$.

C ges av $\mathbf{r}(t)$: $ds = |\mathbf{r}'(t)|\,dt$.

$\mathbf{r}'(t) = (0,\ 2t,\ 6t^2)$. $\quad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{4t^2+36t^4} = \sqrt{4t^2(1+9t^2)} = 2t\sqrt{1+9t^2}$

($2t \ge 0$ om $0 \le t \le 0$)

$$\int_C ds = \int_0^1 2t\sqrt{1+9t^2}\,dt = \left\{\begin{matrix} s = 1+9t^2 \\ ds = 18t\,dt \\ t=0 \Rightarrow s=1 \\ t=1 \Rightarrow s=10 \end{matrix}\right\} = \int_1^{10} \sqrt{s}\,\frac{ds}{9} =$$

$$= \left[\frac{1}{9}\frac{s^{3/2}}{3/2}\right]_1^{10} = \frac{2\cdot(10^{3/2}-1)}{27}$$

<u>Svar:</u> Längden är $\frac{2(10^{3/2}-1)}{27}$ (längdenheter)

2) Låt $f(x,y) = \sin(x^2y) + 1$

a) Bestäm i vilken riktning som f växer mest i punkten $(\sqrt{\pi}, 2)$

b) Ge en formel för tangentplanet till grafen $z = f(x,y)$ i punkten $(\sqrt{\pi}, 2, 1)$

c) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(\sqrt{\pi}, 2)$ och riktningen $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

---

a) $\nabla f = (f'_x, f'_y) = (\cos(x^2y) \cdot 2xy, \cos(x^2y) \cdot x^2)$

$\nabla f(\sqrt{\pi}, 2) = (\cos(2\pi) \cdot 4\sqrt{\pi}, \cos(2\pi) \cdot \pi) = (4\sqrt{\pi}, \pi)$

$|\nabla f(\sqrt{\pi}, 2)| = \sqrt{16\pi + \pi^2}$

Svar: f växer mest i gradientens riktning,

$$\frac{\nabla f(\sqrt{\pi}, 2)}{|\nabla f(\sqrt{\pi}, 2)|} = \frac{(4\sqrt{\pi}, \pi)}{\sqrt{16\pi + \pi^2}}$$

(eller vilken som helst positiv multipel av gradienten $c\nabla f(\sqrt{\pi}, 2)$, t.ex. $(4\sqrt{\pi}, \pi)$ eftersom pekar i samma riktning)

b) Ekvation för tangentplan till graf $z = f(x,y)$ i (a,b):

$$z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

$$z = 1 + 4\sqrt{\pi}(x - \sqrt{\pi}) + \pi(y - 2)$$

$$(= 4\sqrt{\pi}x + \pi y + 1 - 6\pi)$$

Svar: $z = 1 + 4\sqrt{\pi}(x - \sqrt{\pi}) + \pi(y-2)$

c) Riktningsderivata i riktning $\mathbb{V}$, $\left(|\mathbb{V}| = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1\right)$

$$\mathbb{D}_{\mathbb{V}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \bullet \mathbb{V}$$

$$\nabla f(\sqrt{\pi},2) \bullet \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{12\pi} + \frac{\pi}{2}$$

<u>Svar:</u> $\mathbb{D}_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)} f(\sqrt{\pi},2) = \sqrt{12\pi} + \frac{\pi}{2}$

3) Bestäm alla kritiska punkter till funktionen

$$f(x,y) = y^3 + x^2y - 3x^2 - 6y^2$$

och avgör om dessa punkter är lokala max-, min- eller sadelpunkter.

$$\nabla f = (f'_x, f'_y) = (2xy - 6x,\ 3y^2 + x^2 - 12y)$$

Kritiska punkter $\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2xy - 6x = 0 & \text{(i)} \\ 3y^2 + x^2 - 12y = 0 & \text{(ii)} \end{cases}$

(i): $2xy - 6x = 2x(y-3) = 0 \iff \underline{x = 0 \text{ el. } y = 3}$.

Sätter in detta i (ii):

a) $\underline{x=0}$: (ii): $3y^2 - 12y = 3y(y-4) = 0 \iff \underline{y=0 \text{ el. } y=4}$

b) $\underline{y=3}$: (ii): $27 + x^2 - 36 = 0 \iff x^2 = 9 \iff \underline{x=3 \text{ el. } x=-3}$

<u>Kritiska punkter:</u> $(0,0)$, $(0,4)$, $(3,3)$ och $(-3,3)$.

Undersöker dessa m.h.a. andraderivatatestet:

(x,y) kritisk punkt till f, $D(x,y) = \det\begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix} =$

$$= f''_{xx}(x,y) f''_{yy}(x,y) - f''_{xy}(x,y)^2$$

Om $\underline{D(x,y) > 0}$: a) $f''_{xx}(x,y) > 0$: (x,y) lokalt min

b) $f''_{xx}(x,y) < 0$: (x,y) lokalt max

$\underline{D(x,y) < 0}$: c) (x,y) sadelpunkt.

$f_{xx} = 2y - 6, \quad f_{xy} = 2x \quad f_{yy} = 6y - 12.$

$D(a,b) = (2y-6)(6y-12) - 4x^2$

$D(0,0) = (-6)\cdot(-12) > 0, \quad f_{xx}(0,0) = -6 < 0 \Rightarrow (0,0)$ <u>lok. max</u>

$D(0,4) = 2 \cdot 12 > 0, \quad f_{xx}(0,4) = 2 > 0 \Rightarrow (0,4)$ <u>lok. min</u>

$D(-3,3) = -36 < 0 \Rightarrow (-3,3)$ sadelpunkt

$D(3,3) = -36 < 0 \Rightarrow (3,3)$ sadelpunkt

<u>Svar:</u> De kritiska punkterna är:

$(0,0)$: lokalt maximum
$(0,4)$: lokalt minimum
$(-3,3)$ sadelpunkt
$(3,3)$ sadelpunkt

4) Beräkna trippelintegralen $\iiint_D \cos(x+z)\,dV$

över området $D = \{ (x,y,z) \mid 0 \le y \le \pi/2,\ 0 \le x \le y,\ 0 \le z \le x \}$.

Enligt formeln för upprepad integration:

$$\iiint_D \cos(x+z)\,dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^{y} \int_0^{x} \cos(x+z)\,dz\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{y} \Big[\sin(x+z) \Big]_{z=0}^{z=x} dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^{y} \sin(2x) - \sin(x)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \Big[-\frac{\cos(2x)}{2} + \cos(x) \Big]_{x=0}^{x=y} dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} -\frac{\cos(2y)}{2} + \cos(y) + \frac{1}{2} - 1\,dy = \Big[-\frac{\sin(2y)}{4} + \sin(y) - \frac{y}{2} \Big]_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{\sin(\pi)}{4} + \sin(\pi/2) - \frac{\pi}{4} + \frac{\sin(0)}{4} - \sin(0) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

<u>Svar:</u> $1 - \frac{\pi}{4}$.

5) Beräkna masscentrum för kvartscirkelskivan

$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$$

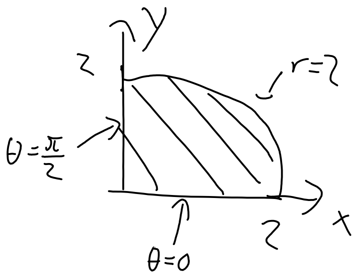
om D har varierande densitet $\rho(x,y) = 1+x^2+y^2$.

Masscentrum: $(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}\right)$ där

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dA, \quad M_x = \iint_D x\rho(x,y)\,dA, \quad M_y = \iint_D y\rho(x,y)\,dA.$$

I polära koordinater $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ blir D:

$$0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le \pi/2.$$



Så enligt formeln för integration i polära koordinater, $dA = r\,dr\,d\theta$, och $\rho(x,y) = 1+x^2+y^2 = 1+r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 1+r^2$:

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 (1+r^2)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^2}{2}+\frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2}(2+4)\,d\theta = 6\cdot\pi/2 = 3\pi.$$

$$M_x = \iint_D x\rho(x,y)\,dA = \iint_D r\cos\theta\,(1+r^2)\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\left[\frac{r^3}{3}+\frac{r^5}{5}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos\theta\left(\frac{8}{3}+\frac{32}{5}\right)d\theta = \frac{8\cdot 5+3\cdot 32}{15}\left[\sin\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{136}{15}$$

$$M_y = \iint_D y\rho(x,y)\,dA = \iint_D r\sin\theta\,(1+r^2)\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= (\text{som ovan}) = \frac{136}{15}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta = \frac{136}{15}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{136}{15}.$$

(kunde också se direkt att $M_y = M_x$, för området och densiteten symmetriska i x och y)

Svar: $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{136/15}{3\pi}, \frac{136/15}{3\pi}\right) = \left(\frac{136}{45\pi}, \frac{136}{45\pi}\right).$

6) Beräkna kurvintegralen $\int_C 2xy\,dx + (x^2+1)\,dy$,

där kurvan C parametriseras av

$$(x(t), y(t)) = (t^3+1, t^2), \quad 0 \le t \le 1.$$

<u>Metod 1:</u> Kurvintegralen är $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ där

$$\mathbb{F} = (2xy, x^2+1) = (P, Q).$$

Eftersom $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial y}$, så är vektorfältet

konservativt, dvs det finns en potential f s.a. $\nabla f = \mathbb{F}$.

Enligt kurvintegralens huvudsats är då

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbb{r} = f(\mathbb{r}(1)) - f(\mathbb{r}(0)).$$

Vi bestämmer därför en potential f.

Speciellt är då $f'_x = P = 2xy \quad (*)$

En lösning till $(*)$ är $f_0(x,y) = x^2 y$, och den allmänna lösningen

$$f(x,y) = f_0(x,y) + g(y) = x^2 y + g(y).$$

Vi sätter in detta i andra ekvationen, $f'_y = Q$ för att

bestämma g: $\quad f'_y = (f_0)'_y + g'(y) = x^2 + g'(y) = x^2 + 1$

$\Rightarrow g'(y) = 1 \Rightarrow g(y) = y + C.$

Så en potential är $f = x^2y + y$.

Alltså får vi då enligt ovan:

$$\int_C 2xy\,dx + (x^2+1)\,dy = f(\mathbf{r}(1)) - f(\mathbf{r}(0)) =$$

$$= f(2,1) - f(1,0) = 4 + 1 - 0 = 5$$

Metod 2: $x = t^3 + 1,\ y = t^2 \Rightarrow dx = 3t^2dt,\quad dy = 2t\,dt$

$$\int_C 2xy\,dx + (x^2+1)\,dy = \int_0^1 2(t^3+1)t^2 \cdot 3t^2dt + ((t^3+1)^2+1) \cdot 2t\,dt =$$

$$= \int_0^1 6t^7 + 6t^4 + 2t^7 + 4t^4 + 4t\,dt = \int_0^1 8t^7 + 10t^4 + 4t\,dt =$$

$$= \left[t^8 + 2t^5 + 2t^2\right]_0^1 = 1 + 2 + 2 = 5$$

Svar: 5

7) Låt S vara den parametriserade ytan som

ges av $\mathbb{r}(s,t) = (s^2, st, t^2)$.

Bestäm en formel för tangentplanet till S i punkten

$\mathbb{r}(3,1) = (9, 3, 1)$

En normalvektor till tangentplanet till ytan $\mathbb{r}(s,t)$ i $\mathbb{r}(s_0,t_0)$

ges av $\mathbb{n} = \mathbb{r}_s'(s_0,t_0) \times \mathbb{r}_t'(s_0,t_0)$.

$\mathbb{r}_s'(s,t) = (2s, t, 0) \qquad \mathbb{r}_s'(3,1) = (6,1,0)$

$\mathbb{r}_t'(s,t) = (0, s, 2t) \qquad \mathbb{r}_t'(3,1) = (0,3,2)$

$$\mathbb{n} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (2, -12, 18).$$

Tangentplanet är det plan med normalvektor $\mathbb{n}$ som går

genom $\mathbb{r}(3,1) = (9,3,1)$ och ges då av: $\mathbb{n} \bullet (x-9, y-3, z-1) = 0$

$2(x-9) - 12(y-3) + 18(z-1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x - 9 - 6y + 18 + 9z - 9 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x - 6y + 9z = 0$

Svar: $2(x-9) - 12(y-3) + 18(z-1) = 0$
el. $x - 6y + 9z = 0$.

8) Beräkna arean av den delen av ytan $z = 2x + 2y$ där (x,y) ligger i triangeln som begränsas av linjerna $x=1$, $y=0$ och $x=y$.

Volymelement för yta som är grafen $z = f(x,y)$:

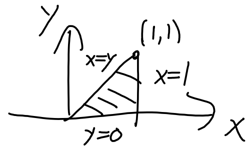
$$dS = \sqrt{(f_x')^2 + (f_y')^2 + 1}\, dx\,dy$$

(alt, använder formeln för allmän parametriserad yta $\mathbf{r}(x,y)$, $dS = |\mathbf{r}_x' \times \mathbf{r}_y'|\,dx\,dy$, vilket om $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$ ger formeln ovan)

$f_x' = 2$, $f_y' = 2$, så $dS = \sqrt{4+4+1}\, dx\,dy = 3\, dx\,dy$.

Triangeln T som begränsas av $x=1$, $y=0$ och $y=x$

är följande,



och har area $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.

Så arean blir: $\iint_S dS = \iint_T 3\, dx\,dy = 3\, \text{area}(T) = \frac{3}{2}$.

Svar: $3/2$ (areaenheter)