Lösningar, Tenta 2017-08-17, LMA017

1. Antag att en partikel rör sig med positionsvektor

$$\mathbf{r}(t) = (\sin(2t) + \cos(2t), \sin(2t) - \cos(2t), t^2).$$

Vad är hastigheten, farten och accelerationen av partikeln?

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\sin(2t)+\cos(2t), \sin(2t)-\cos(2t), t^2)$$

Hastighet $= \mathbf{r}'(t)$ Fart $= |\mathbf{r}'(t)|$ Acceleration $= \mathbf{r}''(t)$.

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (2\cos(2t) - 2\sin(2t), 2\cos(2t) + 2\sin(2t), 2t)$$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}'(t)|^2 &= (2\cos(2t)-2\sin(2t))^2 + (2\cos(2t)+2\sin(2t))^2 + (2t)^2 \\
&= 4\cos^2(2t) - \cancel{4\cos(2t)\sin(2t)} + 4\sin^2(2t) \\
&\quad + 4\cos^2(2t) + \cancel{4\cos(2t)\sin(2t)} + 4\sin^2(2t) + 4t^2 = \\
&= 8(\underbrace{\cos^2(2t) + \sin^2(2t)}_{=1}) + 4t = 8 + 4t
\end{aligned}$$

$$\mathbf{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) = (-4\sin(2t) - 4\cos(2t), -4\sin(2t) + 4\cos(2t), 2)$$

__Svar:__ Hastighet: $\mathbf{r}'(t) = (2\cos(2t) - 2\sin(2t), 2\cos(2t) + 2\sin(2t), 2t)$

Fart: $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{8 + 4t^2}$

Acceleration: $\mathbf{r}''(t) = (-4\sin(2t) - 4\cos(2t), -4\sin(2t) + 4\cos(2t), 2)$

2. Låt

$$g(x,y) = f(e^{x+2y}, e^{x-2y}),$$

där $f(u,v)$ är en deriverbar funktion så att

$$f(0,0) = 2, f_u(0,0) = 3, f_v(0,0) = 7$$

och

$$f(1,1) = 3, f_u(1,1) = 11, f_v(1,1) = 5.$$

Beräkna $g'_x(0,0)$ och $g'_y(0,0)$.

Låt $u(x,y) = e^{x+2y}$, $v(x,y) = e^{x-2y}$. Då är $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$.

Behöver följande derivator när använder kedjeregeln nedan:

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+2y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = e^0 = 1$, $\frac{\partial v}{\partial x} = e^{x-2y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = e^0 = 1$

$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x+2y} \cdot 2$, $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = e^0 \cdot 2 = 2$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^{x-2y} \cdot (-2)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = e^0 \cdot (-2) = -2$.

Enligt kedjeregeln:

$$g'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f(u(x,y), v(x,y)) \right) = f'_u(u(x,y), v(x,y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + f'_v(x,y) \frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

så $g'_x(0,0) = f'_u(1,1)\, u'_x(0,0) + f'_v(1,1)\, v'_x(1,1) = 11 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 16$

På motsvarande sätt:

$$g'_y(0,0) = f'_u(1,1)\, u'_y(0,0) + f'_v(1,1)\, v'_y(0,0) = 11 \cdot 2 + 5 \cdot (-2) = 12.$$

Svar: $g'_x(0,0) = 16$, $g'_y(0,0) = 12$.

3. Låt $f(x,y) = y + x - 5$. Bestäm maximum och minimum av funktionen $f(x,y)$ under bivillkoret

$$2x^2 + y^2 = 1.$$

Bivillkoret innebär att (x,y) är en ellips som är sluten och begränsad, och alltså existerar maximum och minimum, och kan därmed använda metoden med <u>Lagrangemultiplikatorer</u>:

Max/min till $f(x,y)$ under bivilkoret $g(x,y) = c$ måste vara lösningar till

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = c \end{cases}$$

för något λ.

Med $f(x,y) = y + x - 5$ och $g(x,y) = 2x^2 + y^2$,

får då följande ekv. system:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = \lambda \cdot 4x \iff \lambda = \frac{1}{4x}, \quad x \neq 0 \quad (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = \lambda \cdot 2y \overset{(1)}{\iff} 1 = \frac{1}{4x} \cdot 2y \iff y = 2x, \ x \neq 0 \quad (2) \\ g(x,y) = 2x^2 + y^2 = 1 \overset{(2)}{\iff} 2x^2 + (2x)^2 = 6x^2 = 1 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}. \end{cases}$$

Kandidater till max/min: $x = 1/\sqrt{6} \Rightarrow y = 2x = 2/\sqrt{6}$

$x = -1/\sqrt{6} \Rightarrow y = 2x = -2/\sqrt{6}$.

$f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} - 5 = \frac{3}{\sqrt{6}} - 5 \leftarrow$ störst $\Rightarrow$ max

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} - 5 = -\frac{3}{\sqrt{6}} - 5 \leftarrow$ minst $\Rightarrow$ min

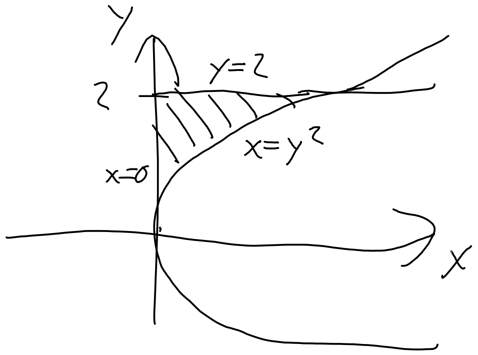
<u>Svar</u>: max $\frac{3}{\sqrt{6}} - 5$; $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ och min $-\frac{3}{\sqrt{6}} - 5$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

4. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D e^{y^3}\,dA,$$

där D är området som begränsas av kurvorna $x = 0$, $y = 2$ och $x = y^2$.

Ritar området:



Området ges som $D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 2 \quad 0 \le x \le y^2\}$

så enligt formeln för upprepad integration:

$$\iint_D e^{y^3}\,dA = \int_0^2 \int_0^{y^2} e^{y^3}\,dx\,dy = \int_0^2 \left[e^{y^3} x \right]_0^{y^2} dy =$$

$$= \int_0^2 e^{y^3} y^2\,dy = \left\{ \begin{array}{l} t = y^3 \\ dt = 3y^2 dy \\ y=0 \Rightarrow t=0 \\ y=2 \Rightarrow t=8 \end{array} \right\} = \int_0^8 e^t\,dt/3 = \left[e^t/3 \right]_0^8 = \frac{e^8 - 1}{3}.$$

Svar: $\frac{e^8-1}{3}$.

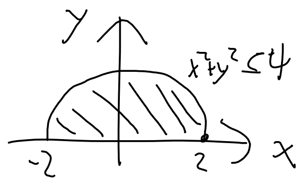
5. Beräkna arean av den delen av hyperboloiden $z = 2(x^2 - y^2)$ som ligger ovanför halvcirkelskivan $\{x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0\}$.

Arean av grafen $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ ges av

$$\iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dA$$

$$f(x,y) = 2x^2 - 2y^2 \qquad f'_x = 4x \quad f'_y = 4y.$$

Området $D = \{x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$ ges i polära koordinater som $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi$



Enligt formeln för integration i polära koordinater,

$$\iint_D \sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2}\, dA = \int_0^2 \int_0^\pi \sqrt{1 + 16r^2}\, r\, d\theta\, dr =$$

$$= \pi \int_0^2 \sqrt{1 + 16r^2}\, r\, dr = \left\{ \begin{array}{l} s = 1 + 16r^2 \\ ds = 32r\,dr \\ r = 0 \Rightarrow s = 1 \\ r = 2 \Rightarrow s = 65 \end{array} \right\} = \pi \int_1^{65} \sqrt{s}\, ds/32 = \frac{\pi}{32}\left[\frac{s^{3/2}}{3/2}\right]_1^{17} = \frac{\pi}{48}(65^{3/2} - 1)$$

Svar: $\frac{\pi}{48}(65^{3/2} - 1)$ a.e.

6. Beräkna arbetet som vektorfältet $\mathbf{F} = (e^{-y}, -xe^{-y} + e^{y})$ utför på en partikel som rör sig längs med kurvan

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(\pi t), 3t + \sin(\pi t)), \quad 0 \le t \le 1.$$

$$\mathbb{F} = (P, Q) = (e^{-y}, -xe^{-y} + e^{y})$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^{-y}$$

$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ och def. på $\mathbb{R}^2$ som är enkelt sammanhängande $\Rightarrow$

$\mathbb{F}$ är konservativt, dvs $\mathbb{F} = \nabla f$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P = e^{-y} \Rightarrow f = xe^{-y} + g(y) \quad (*)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \underset{(*)}{=} \frac{\partial}{\partial y}(xe^{-y} + g(y)) = -xe^{-y} + g'(y) = Q = -xe^{-y} + e^{y}$$

$$\Rightarrow g'(y) = e^{y} \Rightarrow g(y) = e^{y} + C.$$

En potential är då (med $C = 0$) $\quad f = xe^{-y} + e^{y}$.

Om C är kurvan som ges av $\mathbb{r}(t) = (\cos(\pi t), 3t + \sin(3\pi t))$
$0 \le t \le 1$

så ges arbetet av $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbb{r}$

och enligt huvudsatsen för kurvintegraler:

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbb{r} = f(\mathbb{r}(1)) - f(\mathbb{r}(0)) = f(-1, 3) - f(1, 0)$$

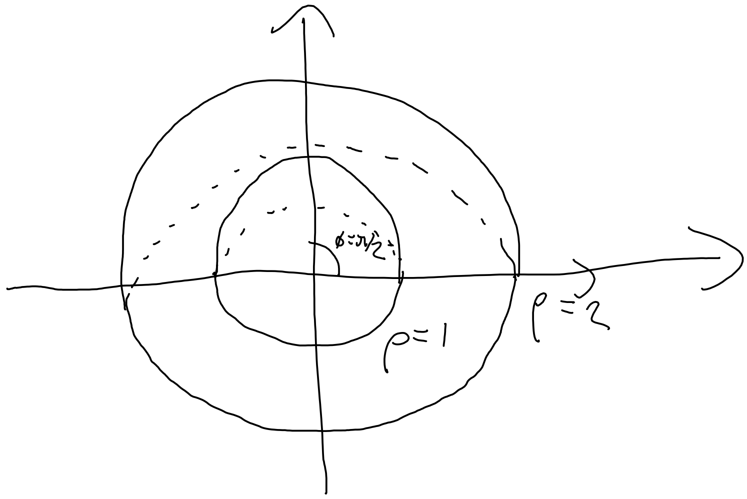
$$= -e^{-3} + e^{3} - (1 + 1) = -e^{-3} + e^{3} - 2$$

Svar: Arbetet är $-e^{-3} + e^{3} - 2$

7. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_D x^2 + y^2 dV,$$

där D är området innehållet i $\{z \geq 0\}$ som ligger mellan sfärerna $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.



Omrädet ges i sfäriska koordinater

$$(x, y, z) = (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)$$

av $\quad 1 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$(z \geq 0)$

I sfäriska koordinater $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta =$

$$= \rho^2 \sin^2\phi \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} = \rho^2 \sin^2\phi.$$

Enligt formeln för integration i sfäriska koordinater
$(dV = \rho^2 \sin\phi \, d\theta \, d\rho \, d\theta)$

$$\iint_D x^2 + y^2 dV = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin^2\phi \, \rho^2 \sin\phi \, d\theta \, d\rho \, d\phi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \sin^3\phi \, \rho^4 \, d\rho \, d\phi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3\phi \left[\rho^5/5 \right]_1^2 d\phi$$

$$= 2\pi \cdot \frac{2^5 - 1}{5} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^3\phi \, d\phi =$$

(trig. ettan)

$$= 2\pi \cdot \frac{31}{5} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2\phi) \sin\phi \, d\phi = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos\phi \\ dt = -\sin\phi \\ \phi = 0 \Rightarrow t = 1 \\ \phi = \pi/2 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{62\pi}{5} \left(-\int_1^0 (1 - t^2) \, dt \right) = \frac{62\pi}{5} \int_0^1 1 - t^2 \, dt = \frac{62\pi}{5} \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{62\pi}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{124\pi}{15}.$$

Svar: $124\pi/15$

(svaret behöver inte förenklas, utan går lika bra att svara $\frac{2\pi(2^5-1)}{5} \cdot \frac{2}{3}$)

8. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x^2, y^2, z(x^2+y^2))$ ut ur området som begränsas av cylindern $x^2+y^2=1$ och planen $z=0$ och $z=2$.

Om S är ytan som begränsas av cylindern $x^2+y^2=1$ och planen $z=0$ och $z=2$ så ges flödet av

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

S är randen till området $D = \{x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 2\}$.

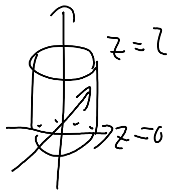
Enligt divergenssatsen är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z(x^2+y^2)\right) = 2x + 2y + x^2 + y^2.$$

I cylindriska koordinater $(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ ges

D av $\quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le z \le 2$



så enligt formeln för integration i cylindriska koord

$$\iiint_D 2x+2y+x^2+y^2 \, dV = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(2r\cos\theta + 2r\sin\theta + r^2\right) r \, d\theta \, dz \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 \int_0^2 r^3 \, dz \, dr = 4\pi \int_0^1 r^3 \, dr = 4\pi \left[r^4/4 \right]_0^1 = \pi$$

$\left(\int_0^{2\pi} \cos\theta = \int_0^{2\pi} \sin\theta = 0 \right)$

__Svar:__ π (volymenheter/tidsenhet)