Lösningar, Tenta 2017-12-19, LMA017

1. Bestäm tangentplanet till nivåytan $x\cos(x) + \cos(zy) = 0$ i punkten $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}, \pi)$.

Tangentplanet till en nivåyta $F(x,y,z) = c$ i en punkt (x_0, y_0, z_0) ges av:

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0) \bullet (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) = 0$$

Här $F(x,y,z) = x\cos(x) + \cos(zy)$ och $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}, \pi)$.

$$\nabla F = (\cos(x) - x\sin(x),\ -\sin(zy)\cdot z,\ -\sin(zy)\cdot y)$$

$$\nabla F(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{1}{2}, \pi) = (-\tfrac{\pi}{2},\ -\pi,\ -\tfrac{1}{2})$$

Svar: Tangentplanet är

$$-\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \pi\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(z - \pi) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \pi x + 2\pi y + z = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi$$

2. Låt

$$g(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$$

eller förklara varför det inte existerar.

(b) Låt

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Beskriv i vilka punkter som $f(x,y)$ är kontinuerlig.

---

a) Låt $u(x,y) = x^2+y^2$ och $h(t) = \frac{\sin t}{t}$ s.a. $g(x,y) = h(u(x,y))$.

Eftersom $\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = u(0,0) = 0$ (x^2+y^2 polynom, som är kont. överallt)

och $\lim_{t\to 0} h(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

(standardgränsv., alt. l'Hôpitals regel, alt. def. av derivata för $\sin t$ i $t=0$)

så blir $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(u(x,y)) = \lim_{t\to 0} h(t) = 1$.

Svar: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 1$.

b) Utanför $(0,0)$ är $f(x,y) = g(x,y)$ och täljaren och nämnaren är elementära funktioner av x och y som då är kontinuerliga överallt. Då blir kvoten kontinuerlig så länge nämnaren inte är 0, vilket den är så länge $(x,y) \neq (0,0)$.

Eftersom $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \underset{\text{(enl. a))}}{=} 1 = f(0,0)$

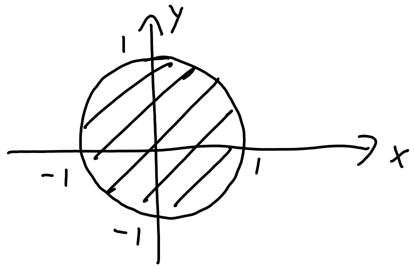
så är f även kontinuerlig i $(0,0)$.

<u>Svar:</u> f är kontinuerlig överallt.

3. Låt

$$f(x, y) = 2x^2 - 2x + 2y^2 - 2y.$$

Bestäm globala maximum och minimum av f i området $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.



Kandidater till max och min:

1) Kritiska punkter i området:

$$\begin{cases} f_x = 4x - 2 = 0 \\ f_y = 4y - 2 = 0 \end{cases} \iff (x,y) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2} < 1 \quad \text{så inuti området} \right)$$

$$\boxed{f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2} - 1 + \tfrac{1}{2} - 1 = -1.}$$

2) Extremvärden på randen $\quad x^2 + y^2 = 1$

Alternativ 1: Se detta som optimering av $f(x,y)$ under bivillkor $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1.$

Kan då lösa med metoden med Lagrangemultiplikatorer:

Kandidater till extremvärden är (x,y) s.a. finns λ där

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda\, g(x,y) \\ g(x,y) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} f_x = 4x - 2 = \lambda g_x = \lambda \cdot 2x & (1) \\ f_y = 4y - 2 = \lambda g_y = \lambda \cdot 2y & (2) \\ g(x,y) = x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

Får att $x \neq 0$ och $y \neq 0$ från (1) resp. (2), eftersom om sätter in $x=0$ el. $y=0$ ger det $-2=0$.

Alltså blir: $(1) \iff \dfrac{4x-2}{2x} = \lambda \iff 2 - \dfrac{1}{x} = \lambda$

och $(2) \iff \dfrac{4y-2}{2y} = \lambda \iff 2 - \dfrac{1}{y} = \lambda$.

$\Rightarrow 2 - \dfrac{1}{x} = 2 - \dfrac{1}{y} \iff \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y} \iff x = y,\quad x,y \neq 0.$

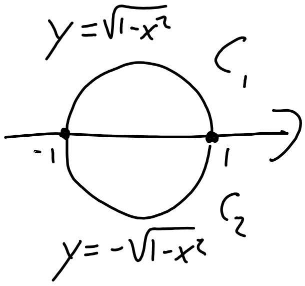
sätter in $y=x$ i (3): $x^2 + x^2 = 1 \iff x^2 = \dfrac{1}{2} \iff x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow (x,y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ el. $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$\boxed{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 - 2\sqrt{2}.}$$

$$\boxed{f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 + 2\sqrt{2}}$$

<u>Alternativ 2:</u> Parametriserar randen, t.ex. med



och har följande kandidater till max och min:

2 a) Kritiska punkter av f längs C_1:

$g_1(x) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = 2x^2 - 2x + 2(1-x^2) - 2\sqrt{1-x^2} = 2 - 2x - 2\sqrt{1-x^2}$

$g_1'(x) = -2 - \cancel{2}\dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -2 + \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \iff x = \sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow x^2 = 1 - x^2 \iff 2x^2 = 1 \iff x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Om $x = \sqrt{1-x^2}$, så $x \geq 0 \Rightarrow$ kritisk punkt $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Ger kandidat $\boxed{g_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 - 2\sqrt{2}}$

Kritiska punkter av f längs C_2:

$$g_2(x) = f\left(x, -\sqrt{1-x^2}\right) = \ldots (\text{som ovan}) \ldots = 2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}$$

$$g_2'(x) = -2 - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \iff \ldots (\text{som ovan}) \ldots \iff x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ger kandidat $\boxed{g_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 + 2\sqrt{2}}$

2b) "Hörn", dvs ändpunkter i parametriseringen

$$\boxed{f(-1,0) = 2 + 2 = 4}$$

$$\boxed{f(1,0) = 2 - 2 = 0}$$

<u>Alternativ 3</u> Parametrisera randen med $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$

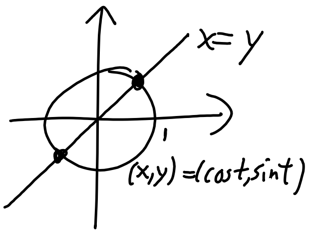
och har följande kandidater till max och min:

2 a) Kritiska punkter av

$$g(t) = f(r(t)) = 2\cos^2 t - 2\cos t + 2\sin^2 t - 2\sin t \underset{(\text{trig. ettan})}{=} 2 - 2\cos t - 2\sin t.$$

$$g'(t) = 2\sin t - 2\cos t = 0 \iff \sin t = \cos t \iff \tan t = 1 \underset{(0 \le t \le 2\pi)}{\iff} t = \pi/4 \text{ el. } t = 5\pi/4.$$

$\Big(\iff (x,y) = (\cos t, \sin t)$ och $x = y$



$\Big)$

Ger kandidater $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

och $g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

som innan.

2 b) "Hörn", dvs ändpunkter i parametriseringen

$$\boxed{g(0) = g(2\pi) = f(1,0) = 0.}$$

Jämför kandidaterna:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 - 2\underbrace{\sqrt{2}}_{=1{,}4\ldots<1{,}5} > 2 - 2\cdot 1{,}5 = -1 = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

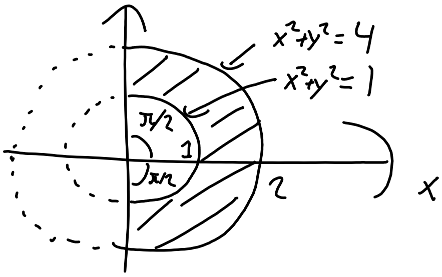
Svar: f har max $2+2\sqrt{2}$ i $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

och min -1 i $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4. Beräkna

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dA,$$

där $D = \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4, x \ge 0\}$.



D ges i polära koordinater av $1 \le r \le 2$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

Så enligt formeln för integration i polära koordinater ($dA = r\,d\theta\,dr$) blir då

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dA = \int_1^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{r^2} r\,d\theta\,dr =$$

$$= \left(\pi/2 - (-\pi/2)\right) \int_1^2 e^{r^2} r\,dr = \left\{ \begin{array}{l} s = r^2 \\ ds = 2r\,dr \\ r=1 \Rightarrow s=1 \\ r=2 \Rightarrow s=4 \end{array} \right\} = \pi \int_1^4 e^s \frac{ds}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[e^s\right]_1^4 = \frac{\pi}{2}(e^4 - e).$$

<u>Svar:</u> $\frac{\pi}{2}(e^4 - e)$

5. Beräkna volymen av området

$$E = \{(x, y, z) \mid 1 \le z \le 2, 0 \le x \le \ln z, 0 \le y \le e^x\}.$$

Enligt formeln för upprepad integration ges volymen av:

$$\iiint_E dV = \int_1^2 \int_0^{\ln z} \int_0^{e^x} dy\,dx\,dz = \int_1^2 \int_0^{\ln z} e^x\,dx\,dz =$$

$$= \int_1^2 \left[e^x \right]_{x=0}^{x=\ln z} dz = \int_1^2 e^{\ln z} - e^0\,dz = \int_1^2 z - 1\,dz$$

$$= \left[\frac{z^2}{2} - z \right]_1^2 = \frac{4}{2} - 2 - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2}$$

Svar: $\frac{1}{2}$ (volymenheter)

6. Avgör vilka av vektorfälten

$$\mathbf{F} = \langle 3x^2 + z, 2y, x + 3z^2 \rangle \text{ och } \mathbf{G} = \langle 3x^2 + z, 2x, x + 3z^2 \rangle$$

som är konservativa. För de av vektorfälten som är konservativa, bestäm en potential.

Ett vektorfält $\mathbb{F}$ på $\mathbb{R}^3$ är konservativt precis om $\text{rot}\,\mathbb{F} = 0$.

$$\text{rot}\,\mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2+z & 2y & x+3z^2 \end{vmatrix} =$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y}(x+3z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2y), -\frac{\partial}{\partial x}(x+3z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(3x^2+z), \frac{\partial}{\partial x}(2y) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2+z) \right\rangle =$$

$$= \langle 0-0, -1+1, 0-0 \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{F}$ är konservativt.

$$\text{rot}\,\mathbb{G} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2+z & 2x & x+3z^2 \end{vmatrix} = \langle 0-0, -1+1, 2-0 \rangle \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{G}$ ej konservativt.

Hittar potential f till $\mathbb{F}$: Vill lösa
$$\begin{cases} f_x = 3x^2+z & (1) \\ f_y = 2y & (2) \\ f_z = x+3z^2 & (3) \end{cases}$$

En lösn. till (1): $f_0 = x^3 + xz$, allmänna lösn.

$$f = x^3 + xz + g(y,z) \quad (*).$$

Sätter in (*) i (2): $f_y \underset{(*)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + xz + g(y,z)\right) = g_y \underset{(2)}{=} 2y$

En lösn. är $g_0(y,z) = y^2$, allmänna lösn. är $g(y,z) = y^2 + h(z)$

$$\Rightarrow \quad f(x,y,z) = x^3 + xz + g(y,z) = x^3 + xz + y^2 + h(z) \quad (**)$$

Sätter in (**) i (3):

$$f_z \underset{(**)}{=} \frac{\partial}{\partial z}\left(x^3 + xz + y^2 + h(z)\right) = x + h'(z) \underset{(3)}{=} x + 3z^2$$

$$\Rightarrow \quad h'(z) = 3z^2 \Rightarrow \text{kan ta } h(z) = z^3$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y,z) = x^3 + xz + y^2 + h(z) = x^3 + xz + y^2 + z^3$$

Svar: $\mathbb{F}$ är konservativt med en potential $f(x,y,z) = x^3 + xz + y^2 + z^3$

$\mathbb{G}$ är inte konservativt.

7. Beräkna arean av ytan

$$z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2}), \quad (x, y) \in [0,1] \times [0,1].$$

Arean av ytan S som ges av $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ är

$$A = \iint_S dS, \quad \text{där } dS = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dA.$$

$$f(x,y) = \frac{2}{3}\left(x^{3/2} + y^{3/2}\right) \Rightarrow f_x = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{1/2} = \sqrt{x}$$

$$f_y = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} y^{1/2} = \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow A = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dA = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + x + y}\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\frac{(1+x+y)^{3/2}}{3/2} \right]_{x=0}^{x=1} dy =$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 (2+y)^{3/2} - (1+y)^{3/2}\, dy = \frac{2}{3} \left[\frac{(2+y)^{5/2} - (1+y)^{5/2}}{5/2} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{4}{15}\left(3^{5/2} - 2^{5/2} - (2^{5/2} - 1^{5/2})\right) = \frac{4}{15}\left(3^{5/2} - 2 \cdot 2^{5/2} + 1\right)$$

Svar: $\frac{4}{15}\left(3^{5/2} - 2 \cdot 2^{5/2} + 1\right)$ (areaenheter)

8. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle.$$

upp genom ytan $z = 1 - x^2 - y^2$, där $x^2 + y^2 \leq 1$.

Flödet av $\mathbb{F}$ genom en yta S, def. av $z = f(x,y)$,

ges av $\pm \iint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbf{S}$ där $d\mathbf{S} = (-f_x, -f_y, 1)\, dA$,

och tecknet beror på om orienteringen av S pekar i samma riktning som $(-f_x, -f_y, 1)$ eller inte.

Här är $(-f_x, -f_y, 1) = (2x, 2y, 1)$ som pekar i positiv z-riktning, dvs. ~~upp~~ genom ytan, och därför plustecken.

Så flödet ges av

$$\iint_D \mathbb{F} \cdot (-f_x, -f_y, 1)\, dA = \iint_D (x, y, 1 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1)\, dA$$

$$= \iint_D 2x^2 + 2y^2 + 1 - x^2 - y^2\, dA = \iint_D 1 + x^2 + y^2\, dA.$$

där $D = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$.

D ges i polära koord. av $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$,

så enl. formeln för integration i polära koordinater ($dA = r\, d\theta\, dr$) blir flödet:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1+r^2) r \, d\theta \, dr = 2\pi \int_0^1 r + r^3 \, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right]_0^1 =$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = 2\pi \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\pi}{2}.$$

<u>Svar:</u> $\frac{3\pi}{2}$