

1. Bestäm tangentlinjen till nivåkurvan $\{x^3 + x^2y^2 + y^3 = 1\}$ i punkten $(1, -1)$.

Om $F(x, y) = x^3 + x^2y^2 + y^3$, så är nivåkurvan
 $\{F(x, y) = 1\}$

Gradienten till F är:

$$\nabla F = \langle F_x, F_y \rangle = \langle 3x^2 + 2xy^2, 2x^2y + 3y^2 \rangle$$

$$\nabla F(1, -1) = \langle 5, 1 \rangle$$

Tangentlinjen till nivåytan i $(1, -1)$ har
 normalvektor $\nabla F(1, -1)$ och går genom $(1, -1)$,
 och ges då av

$$\nabla F(1, -1) \cdot \langle x-1, y-(-1) \rangle = 0$$

$$\langle 5, 1 \rangle \cdot \langle x-1, y+1 \rangle = 0$$

$$5(x-1) + 1(y+1) = 0$$

$$5x + y = 4$$

Svar: Tangentlinjen ges av $5(x-1) + 1(y+1) = 0$
 $\Leftrightarrow 5x + y = 4$.

2. Låt

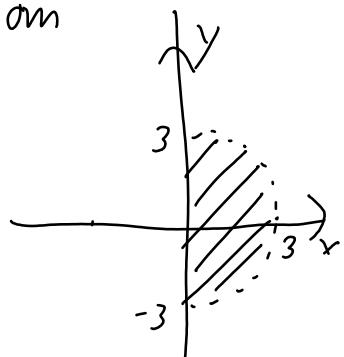
$$f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2) + \sqrt{x}.$$

- (a) Bestäm definitionsmängden till f .
- (b) Om man startar i punkten $(1, 2)$, i vilken riktning skall man gå för att f ska växa som mest?
- (c) Bestäm riktningsderivatan till f i punkten $(1, 2)$ och riktningen $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$.

a) f är definierad för de (x, y) s.t. $\ln(9-x^2-y^2)$ och \sqrt{x} är definierade.

Eftersom $\ln t$ definierad för $t > 0$ och \sqrt{t} def. för $t \geq 0$ är $\ln(9-x^2-y^2)$ resp. \sqrt{x} def. om

$$9 - x^2 - y^2 > 0 \quad (\Rightarrow x^2 + y^2 < 9 \text{ resp. } x \geq 0).$$



Svar: Def. mängden till f är

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 9, x \geq 0\}.$$

b) f växer mest i riktningen ∇f .

$$\nabla f = \left\langle \frac{-2x}{9-x^2-y^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{-2y}{9-x^2-y^2} \right\rangle.$$

$$\nabla f(1, 2) = \left\langle \frac{-2}{9-1-4} + \frac{1}{2}, -\frac{4}{9-1-4} \right\rangle = \langle 0, -1 \rangle \text{ (enhetsvektor)}$$

Svar: I $(1, 2)$ så växer f mest i riktningen $\langle 0, -1 \rangle$.

c) Riktningsderivatan är

$$D_{\mathbb{V}} f(1,2) = \mathbb{V} \cdot \nabla f(1,2) = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle \cdot (0, -1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Svar: $D_{\mathbb{V}} f(1,2) = -\sqrt{3}/2$.

3. Ett av de två gränsvärdena

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^8 - y^8}{x^4 + y^4},$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^8 - y^8}{x^4 + y^8}$$

existerar, och det andra existerar inte. Avgör vilket av gränsvärdena som existerar, och bestäm vad det gränsvärdet är. För det gränsvärdet som inte existerar, förklara varför.

Låt $f(x,y) = \frac{x^8 - y^8}{x^4 + y^4}$ vara funktionen i första gränsvärdet.

$$\frac{x^8 - y^8}{x^4 + y^4} = \frac{(x^4)^2 - (y^4)^2}{x^4 + y^4} = \frac{(x^4 - y^4)(x^4 + y^4)}{x^4 + y^4} \underset{\substack{(\text{konj}) \\ (\text{regeln})}}{=} x^4 - y^4.$$

Så $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^8 - y^8}{x^4 + y^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^4 - y^4 = 0^4 - 0^4 = 0.$

$(\begin{array}{l} x^4 - y^4 \text{ polynom} \\ \text{som är kont.} \end{array})$

Låt $g(x,y) = \frac{x^8 - y^8}{x^4 + y^8}$ vara funktionen i andra gränsvärdet.

För andra gränsvärdet, provar när närmar sig $(0,0)$ längs olika rätta linjer.

Längs x -axeln: $\mathbf{r}_1(t) = (t, 0) \rightarrow (0, 0)$ när $t \rightarrow 0$

$$g(\mathbf{r}_1(t)) = g(t, 0) = \frac{t^8 - 0^8}{t^4 + 0^4} = \frac{t^8}{t^4} = t^4 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

Längs y -axeln: $\mathbf{r}_2(t) = (0, t) \rightarrow (0, 0)$ när $t \rightarrow 0$.

$$g(\mathbf{r}_2(t)) = g(0, t) = \frac{0^8 - t^8}{0^4 + t^8} = \frac{-t^8}{t^8} = -1 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} -1$$

Olika gränsvärden när närmar sig $(0,0)$ längs olika rätta linjer
 \Rightarrow gränsv. existerar inte.

Svar: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^8 - y^8}{x^4 + y^4} = 0$ och

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^8 - y^8}{x^4 + y^8} \text{ existerar inte.}$$

4. Låt

$$f(x, y) = xy \quad \text{och} \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - xy.$$

Bestäm minimum av $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 3$.

Obs: Du behöver inte motivera varför minimum existerar. Bivillkoret definierar en sned ellips, som är sluten och begränsad, och därför existerar minimum.

Använder metoden med Lagrangenmultiplikatorer.

Om extremvärdet till f finns under bivillkoret $g(x, y) = k$, så är de lösningarna (x, y) till

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = k \end{cases}$$

för något λ .

$$\begin{cases} \nabla f = \langle y, x \rangle = \lambda \langle 2x-y, 2y-x \rangle \\ x^2 + y^2 - xy = 3 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$\begin{cases} y = \lambda(2x-y) & (1) \\ x = \lambda(2y-x) & (2) \\ x^2 + y^2 - xy = 3 & (3) \end{cases}$$

Om $2x-y=0$, ger (1) att $y=0 \Rightarrow x=0$,
 $(2x-y=0)$

Men $(x, y) = (0, 0)$ löser inte (3), så kan anta $2x-y \neq 0$.

På samma sätt ger (2) och (3) att $2y-x \neq 0$,

Kan då lösa ut λ i (1) och (2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{2x-y} = \lambda \quad (1') \\ \frac{x}{2y-x} = \lambda \quad (2') \\ x^2 + y^2 - xy = 3 \end{array} \right.$$

$$(1') \& (2') \Rightarrow \frac{y}{2x-y} = \frac{x}{2y-x} \Rightarrow y(2y-x) = x(2x-y)$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 = 2x^2 \Rightarrow x = \pm y.$$

Sätter in detta i (3):

$$\underline{\text{Fall } x=y:} \quad x^2 + x^2 - x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \lambda = 1$$

Två kandidater:

$$\boxed{(x,y) = (\sqrt{3}, \sqrt{3})}$$

$$(x,y) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$$

lösar alla 3 ekv.

$$\underline{\text{Fall } x=-y} \quad x^2 + (-x)^2 - x(-x) = 3 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \mp 1.$$

$$(x,y) = (1, -1) \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{2 \cdot 1 - (-1)} = -\frac{1}{3}$$

$$(x,y) = (-1, 1) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2 \cdot (-1) - 1} = -\frac{1}{3}$$

lösar alla 3 ekv.

Två kandidater

$$\boxed{(x,y) = (1, -1)}$$

$$(x,y) = (-1, 1)$$

Jämför värden i kandidater:

$$f(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$f(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^2 = 3$$

$$f(1, -1) = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$f(-1, 1) = (-1) \cdot 1 = -1$$

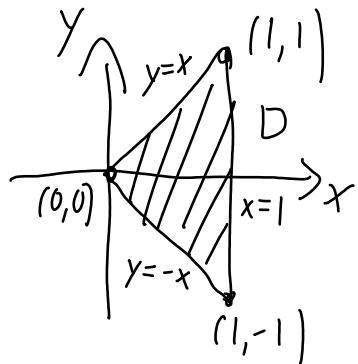
Svar: Minimum är -1 i $(1, -1)$ och $(-1, 1)$

5. Beräkna

$$\iint_D \sin(x^2) dA,$$

där D är det triangulära området med hörn i $(0,0)$, $(1,-1)$ och $(1,1)$.

Ritar upp området:



Från figuren, ser att

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x\}.$$

Enligt formeln för upprepad integration blir då:

$$\begin{aligned}\iint_D \sin(x^2) dA &= \int_0^1 \int_{-x}^x \sin(x^2) dy dx = \int_0^1 \left[y \sin x^2 \right]_{-x}^x dx = \\ &= \int_0^1 2x \sin(x^2) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=1 \end{array} \right\} = \int_0^1 \sin(t) dt = \left[-\cos t \right]_0^1 = \\ &= -\cos 1 + 1\end{aligned}$$

Svar: $1 - \cos(1)$

6. Beräkna medelvärdet av funktionen $f(x, y, z) = xy^2$ längs kurvan C som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \sin t, 2 \cos t, \sqrt{5}t \rangle$, $0 \leq t \leq \pi$.

Obs: Om f är en funktion, och C en kurva, så är

$$\text{medelvärdet av } f \text{ längs } C = \frac{\int_C f ds}{\int_C ds}.$$

C ges av $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \sin t, 2 \cos t, \sqrt{5}t \rangle$ så

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 2 \cos t, -2 \sin t, \sqrt{5} \rangle,$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{(2 \cos t)^2 + (-2 \sin t)^2 + \sqrt{5}^2} = \\ &= \sqrt{4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t + 5} = \sqrt{4+5} = 3 \\ &\quad (\text{trig. ettan}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow ds = |\mathbf{r}'(t)| dt = 3 dt$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}(t)) &= f(2 \sin t, 2 \cos t, \sqrt{5}t) = 2 \sin t / (2 \cos t)^2 = \\ &= 8 \sin t \cos^2 t \end{aligned}$$

$$\int_C f ds = \int_0^{\pi} f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^{\pi} 8 \sin t \cos^2 t \cdot 3 dt =$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \begin{array}{l} u = \cos t \\ du = -\sin t dt \\ t = 0 \Rightarrow u = 1 \\ t = \pi \Rightarrow u = -1 \end{array} \right\} = -24 \int_1^{-1} u^2 du = \left[-8u^3 \right]_1^{-1} = \end{aligned}$$

$$= 8 \cdot (-1)^4 - (-8 \cdot 1^3) = 16$$

$$\int_C ds = \int_0^\pi |r'(t)| dt = \int_0^\pi 3 dt = 3\pi$$

Svar: Medelvärdet är

$$\frac{\int_C f ds}{\int_C ds} = \frac{16}{3\pi} .$$

7. Beräkna masscentrum av halvcylindern som ges av

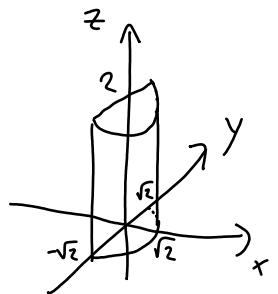
$$E = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 2, \quad x \geq 0, \quad 0 \leq z \leq 2\},$$

där E antas ha konstant densitet $\rho = 1$.

Masscentrum ges av $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m} \right)$,

där $M_x = \iiint_E x dV$, osv.

$$m = \iiint_E dV,$$



E ges i cylindriska koord. av:

$$0 \leq r \leq \sqrt{2} \quad (x^2 + y^2 = r^2 \leq 2)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (x \geq 0 \Leftrightarrow r \cos \theta \geq 0 \Leftrightarrow \cos \theta \geq 0)$$

$$0 \leq z \leq 2$$

Enligt formeln för integration i cylindriska koord.,
 $dV = r dr d\theta dz$ blir då

$$m = \iiint_E dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^2 r dr d\theta dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 d\theta dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} d\theta dz =$$

$$= (\underbrace{\pi/2 - (-\pi/2)}_{= \pi}) \int_0^2 dz = \pi \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Kan också beräknas geometriskt:} \\ \text{massa} = \underbrace{\text{densitet} \cdot \text{volym}}_{=\rho=1} = 1 \cdot \underbrace{\frac{\pi(\sqrt{2})^2}{2} \cdot 2}_{\text{basarea} \cdot \text{höjd}} = 2\pi \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= \iiint_E x dV = \int_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{r^2 - z^2}} r \cos \theta \cdot r dr d\theta dz = \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} \cos \theta \right]_0^{\sqrt{r^2 - z^2}} d\theta dz = \\
 &= \int_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(\sqrt{r^2 - z^2})^3}{3} \cos \theta d\theta dz = \frac{2\sqrt{z}}{3} \int_0^2 \left[\sin \theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} dz = \\
 &= \frac{2\sqrt{z}}{3} \int_0^2 1 - (-1) dz = \frac{4\sqrt{z}}{3} \cdot 2 = \frac{8\sqrt{z}}{3}.
 \end{aligned}$$

Av symmetriskl, alt. räkningar som ovan, $M_y = 0$,

$$\begin{aligned}
 M_z &= \iiint_E z dV = \int_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{r^2 - z^2}} r z dr d\theta dz = \int_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^2 z}{2} \right]_{r=0}^{\sqrt{r^2 - z^2}} d\theta dz = \\
 &= \int_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} z d\theta dz = \pi \int_0^2 z dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^2 = 2\pi
 \end{aligned}$$

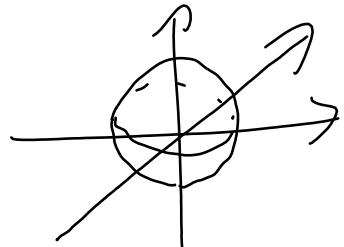
(Kan alt. direkt se av geometriska skäl att $\bar{z} = \frac{M_z}{m} = 1$
 $\Rightarrow M_z = m = 2\pi$)

$$\text{Svar: Masscentrum är: } (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{8\sqrt{z}/3}{2\pi}, 0, \frac{2\pi}{2\pi} \right)$$

$$= \left(\frac{4\sqrt{z}}{3\pi}, 0, 1 \right)$$

8. Låt $\mathbf{F} = \langle x^3, y^3, z^3 \rangle$. Beräkna flödet av vektorfältet \mathbf{F} ut ur området som begränsas av sfären $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

S är randen till klotet $E = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$,



så enligt divergenssatsen är flödet ut ur $S = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV$.

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} x^3 + \frac{\partial}{\partial y} y^3 + \frac{\partial}{\partial z} z^3 = 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3\rho^2$$

i sfäriska koord.

I sfäriska koordinater blir E

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi,$$

så enligt formeln för integration i sfäriska koordinater,

$$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho \quad \text{bli},$$

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 3\rho^2 \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta =$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[-\rho^4 \cos \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi} \, d\phi \, d\theta = 6 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} \, d\theta = \frac{6}{5} \cdot 2\pi = \frac{12\pi}{5}$$

Svar: flödet är $12\pi/5$ (volymenheter/tidseenhet)