Lösningar, Tenta 2019-08-22, LMA017

1. Bestäm tangentlinjen till nivåkurvan $\{x^3 + x^2y^2 + y^3 = 1\}$ i punkten $(1, -1)$.

Om $F(x,y) = x^3 + x^2y^2 + y^3$, så är nivåkurvan

$\{F(x,y) = 1\}$

Gradienten till F är:

$$\nabla F = \langle F_x, F_y \rangle = \langle 3x^2 + 2xy^2, 2x^2y + 3y^2 \rangle$$

$$\nabla F(1,-1) = \langle 5, 1 \rangle$$

Tangentlinjen till nivåytan i $(1,-1)$ har normalvektor $\nabla F(1,-1)$ och går genom $(1,-1)$, och ges då av

$$\nabla F(1,-1) \cdot \langle x-1, y-(-1) \rangle = 0$$

$$\langle 5, 1 \rangle \cdot \langle x-1, y+1 \rangle = 0$$

$$5(x-1) + (y+1) = 0$$

$$5x + y = 4$$

Svar: Tangentlinjen ges av $5(x-1) + 1 \cdot (y+1) = 0$

$\iff$ $5x + y = 4$.

2. Låt

$$f(x,y) = \ln(9 - x^2 - y^2) + \sqrt{x}.$$

(a) Bestäm definitionsmängden till f.

(b) Om man startar i punkten $(1,2)$, i vilken riktning skall man gå för att f ska växa som mest?

(c) Bestäm riktningsderivatan till f i punkten $(1,2)$ och riktningen $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$.

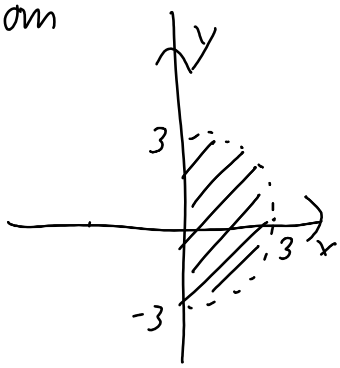
---

a) f är definierad för de (x,y) s.a. $\ln(9-x^2-y^2)$ och $\sqrt{x}$ är definierade.

Eftersom $\ln t$ definierad för $t>0$ och $\sqrt{t}$ def. för $t \geq 0$ är $\ln(9-x^2-y^2)$ resp. $\sqrt{x}$ def. om

$9-x^2-y^2>0 \iff x^2+y^2<9$ resp.

$x \geq 0$.



Svar: Def. mängden till f är

$$\{(x,y) \mid x^2+y^2<9,\ x \geq 0\}.$$

b) f växer mest i riktningen ∇f.

$$\nabla f = \left\langle \frac{-2x}{9-x^2-y^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{-2y}{9-x^2-y^2} \right\rangle.$$

$$\nabla f(1,2) = \left\langle \frac{-2}{9-1-4} + \frac{1}{2}, -\frac{4}{4} \right\rangle = \langle 0,-1 \rangle \text{ (enhetsvektor)}$$

Svar: I $(2,1)$ så växer f mest i riktningen $\langle 0,-1 \rangle$.

c) Riktningsderivatan är

$$D_{\mathbf{v}} f(1,2) = \mathbf{v} \bullet \nabla f(1,2) = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle \bullet \langle 0, -1 \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

<u>Svar:</u> $D_{\mathbf{v}} f(1,2) = -\sqrt{3}/2$.

3. Ett av de två gränsvärdena

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^8 - y^8}{x^4 + y^4},$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^8 - y^8}{x^4 + y^8}$$

existerar, och det andra existerar inte. Avgör vilket av gränsvärdena som existerar, och bestäm vad det gränsvärdet är. För det gränsvärdet som inte existerar, förklara varför.

Låt $f(x,y) = \frac{x^8 - y^8}{x^4 + y^4}$ vara funktionen i första gränsvärdet.

$$\frac{x^8 - y^8}{x^4 + y^4} = \frac{(x^4)^2 - (y^4)^2}{x^4 + y^4} \underset{\text{(konj. regeln)}}{=} \frac{(x^4 - y^4)\cancel{(x^4 + y^4)}}{\cancel{x^4 + y^4}} = x^4 - y^4.$$

Så $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^8 - y^8}{x^4 + y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^4 - y^4 \underset{\text{(}x^4 - y^4 \text{ polynom som är kont.)}}{=} 0^4 - 0^4 = 0.$$

Låt $g(x,y) = \frac{x^8 - y^8}{x^4 + y^8}$ vara funktionen i andra gränsvärdet.

För andra gränsvärdet, provar när närmar sig $(0,0)$ längs olika räta linjor.

Längs x-axeln: $\mathbf{r}_1(t) = (t,0) \to (0,0)$ när $t \to 0$

$$g(\mathbf{r}_1(t)) = g(t,0) = \frac{t^8 - 0^8}{t^4 + 0^4} = \frac{t^8}{t^4} = t^4 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

Längs y-axeln: $\mathbf{r}_2(t) = (0,t) \to (0,0)$ när $t \to 0$.

$$g(\mathbf{r}_2(t)) = g(0,t) = \frac{0^8 - t^8}{0^4 + t^8} = \frac{-t^8}{t^8} = -1 \xrightarrow[t\to 0]{} -1$$

Olika gränsvärden när närmar sig (0,0) längs olika räta linjer
$\Rightarrow$ gränsv. existerar inte.

Svar: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^8-y^8}{x^4+y^4} = 0$ och

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^8-y^8}{x^4+y^8}$ existerar inte.

4. Låt
$$f(x,y) = xy \quad \text{och} \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - xy.$$
Bestäm minimum av $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y) = 3$.

Obs: Du behöver inte motivera varför minimum existerar. Bivillkoret definierar en sned ellips, som är sluten och begränsad, och därför existerar minimum.

Använder metoden med Lagrangemultiplikatorer.

Om extremvärden till f finns under bivillkoret $g(x,y)=k$, så är de lösningar (x,y) till

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = k \end{cases}$$

för något λ.

$$\begin{cases} \nabla f = \langle y, x \rangle = \lambda \langle 2x-y, 2y-x \rangle \\ x^2+y^2-xy = 3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y = \lambda(2x-y) & (1) \\ x = \lambda(2y-x) & (2) \\ x^2+y^2-xy=3 & (3) \end{cases}$$

Om $2x-y=0$, ger (1) att $y=0 \underset{(2x-y=0)}{\Rightarrow} x=0$,

Men $(x,y)=(0,0)$ löser inte (3), så kan anta $2x-y \neq 0$.

På samma sätt ger (2) och (3) att $2y-x \neq 0$.

Kan då lösa ut λ i (1) och (2):

$$\begin{cases} \dfrac{y}{2x-y} = \lambda & (1') \\ \dfrac{x}{2y-x} = \lambda & (2') \\ x^2+y^2-xy=3 \end{cases}$$

$$(1') \,\&\, (2') \Rightarrow \frac{y}{2x-y} = \frac{x}{2y-x} \Rightarrow y(2y-x) = x(2x-y)$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = \pm y.$$

Sätter in detta i (3):

<u>Fall $x=y$:</u> $x^2+x^2-x^2=3 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow y=\pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow \lambda = 1$

löser alla 3 ekv.

Två kandidater: $\boxed{\begin{matrix}(x,y)=(\sqrt{3},\sqrt{3}) \\ (x,y)=(-\sqrt{3},-\sqrt{3})\end{matrix}}$

<u>Fall $x=-y$</u> $x^2+(-x)^2-x(-x)=3 \Leftrightarrow 3x^2=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \Rightarrow y=\mp 1.$

$(x,y)=(1,-1) \Rightarrow \lambda = \dfrac{-1}{2\cdot 1-(-1)} = -\dfrac{1}{3}$ löser alla 3 ekv.

$(x,y)=(-1,1) \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{2\cdot(-1)-1} = -\dfrac{1}{3}$

Två kandidater $\boxed{\begin{matrix}(x,y)=(1,-1) \\ (x,y)=(-1,1)\end{matrix}}$

Jämför värden i kandidater:

$$f(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$f(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^2 = 3$$

$$f(1, -1) = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$f(-1, 1) = (-1) \cdot 1 = -1$$

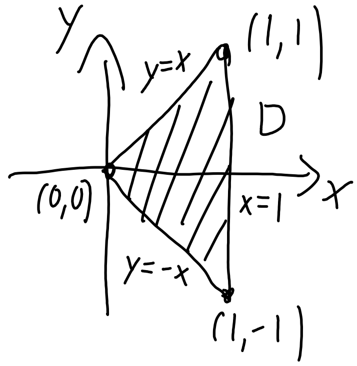
Svar: Minimum är -1 i $(1,-1)$ och $(-1,1)$

5. Beräkna

$$\iint_D \sin(x^2)\, dA,$$

där D är det triangulära området med hörn i $(0,0)$, $(1,-1)$ och $(1,1)$.

Ritar upp området:



Från figuren, ser att

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ -x \leq y \leq x\}.$$

Enligt formeln för upprepad integration blir då:

$$\iint_D \sin(x^2)\, dA = \int_0^1 \int_{-x}^{x} \sin(x^2)\, dy\, dx = \int_0^1 \Big[y \sin x \Big]_{-x}^{x} dx =$$

$$= \int_0^1 2x \sin(x^2)\, dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=1 \end{array} \right\} = \int_0^1 \sin(t)\, dt = \Big[-\cos t \Big]_0^1 =$$

$$= -\cos 1 + 1$$

<u>Svar:</u> $1 - \cos(1)$.

6. Beräkna medelvärdet av funktionen $f(x,y,z) = xy^2$ längs kurvan C som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = \langle 2\sin t, 2\cos t, \sqrt{5}t\rangle$, $0 \leq t \leq \pi$.

Obs: Om f är en funktion, och C en kurva, så är

$$\text{medelvärdet av } f \text{ längs } C \;= \frac{\int_C f\,ds}{\int_C ds}.$$

C ges av $\mathbf{r}(t) = \langle 2\sin t, 2\cos t, \sqrt{5}t\rangle$ så

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 2\cos t, -2\sin t, \sqrt{5}\rangle,$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(2\cos t)^2 + (-2\sin t)^2 + \sqrt{5}^2} =$$

$$= \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 5} = \sqrt{4+5} = 3$$

(trig. ettan)

$$\Rightarrow ds = |\mathbf{r}'(t)|\,dt = 3\,dt$$

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(2\sin t, 2\cos t, \sqrt{5}t) = 2\sin t\,(2\cos t)^2 =$$

$$= 8\sin t\cos^2 t$$

$$\int_C f\,ds = \int_0^{\pi} f(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_0^{\pi} 8\sin t\cos^2 t \cdot 3\,dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \cos t \\ du = -\sin t\,dt \\ t = 0 \Rightarrow u = 1 \\ t = \pi \Rightarrow u = -1 \end{array} \right\} = -24\int_1^{-1} u^2\,du = \left[-8u^3\right]_1^{-1} =$$

$$= 8\cdot(-1)^4 - (-8\cdot 1^3) = 16$$

$$\int_C ds = \int_0^{\pi} \|r'(t)\| dt = \int_0^{\pi} 3\, dt = 3\pi$$

Svar: Medelvärdet är

$$\frac{\int_C f\, ds}{\int_C ds} = \frac{16}{3\pi}.$$

7. Beräkna masscentrum av halvcylindern som ges av

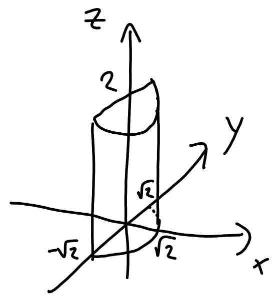
$$E = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 2, \quad x \ge 0, \quad 0 \le z \le 2\},$$

där E antas ha konstant densitet $\rho = 1$.

Masscentrum ges av $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m}\right)$,

där $M_x = \iiint_E x\,dV$, osv.

$$m = \iiint_E dV.$$



E ges i cylindriska koord. av:

$0 \le r \le \sqrt{2} \quad (x^2+y^2 = r^2 \le 2)$

$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad (x \ge 0 \Leftrightarrow r\cos\theta \ge 0 \Leftrightarrow \cos\theta \ge 0)$

$0 \le z \le 2$

Enligt formeln för integration i cylindriska koord, $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$ blir då

$$m = \iiint_E dV = \int_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} d\theta\,dz = \int_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\,dz =$$

$$= \underbrace{(\pi/2 - (-\pi/2))}_{=\pi} \int_0^2 dz = \pi \cdot 2$$

(Kan också beräkna geometriskt:

$\text{massa} = \underbrace{\text{densitet}}_{=\rho=1} \cdot \underbrace{\text{volym}}_{\text{basarea}\cdot\text{höjd}} = 1 \cdot \frac{\pi(\sqrt{2})^2}{2} \cdot 2 = 2\pi$)

$$M_x = \iiint_E x\,dV = \int_0^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{2}} r\cos\theta \cdot r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\cos\theta\right]_0^{\sqrt{2}} d\theta\,dz =$$

$$= \int_0^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{(\sqrt{2})^3}{3}\cos\theta\,d\theta\,dz = \frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^2\left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} dz =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^2 1-(-1)\,dz = \frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot 2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Av symmetriskäl, alt. räkningar som ovan, $M_y = 0$.

$$M_z = \iiint_E z\,dV = \int_0^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{2}} rz\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^2 z}{2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}} d\theta\,dz =$$

$$= \int_0^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} z\,d\theta\,dz = \pi\int_0^2 z\,dz = \pi\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2 = 2\pi$$

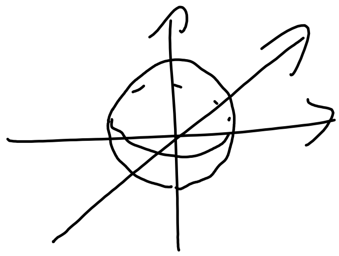
(Kan alt. direkt se av geometriska skäl att $\bar{z} = \frac{M_z}{m} = 1$
$\Rightarrow M_z = m = 2\pi$)

Svar: Masscentrum är: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{8\sqrt{2}/3}{2\pi}, 0, \frac{2\pi}{2\pi}\right)$

$$= \left(\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}, 0, 1\right)$$

8. Låt $\mathbf{F} = \langle x^3, y^3, z^3 \rangle$. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ ut ur området som begränsas av sfären $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

S är randen till klotet $E = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$,



så enligt divergenssatsen är flödet ut ur $S = \iiint_E \operatorname{div} \mathbb{F}\, dV$.

$$\operatorname{div} \mathbb{F} = \frac{\partial}{\partial x} x^3 + \frac{\partial}{\partial y} y^3 + \frac{\partial}{\partial z} z^3 = 3(x^2+y^2+z^2) = \underbrace{3\rho^2}_{\text{i sfäriska koord.}}$$

I sfäriska koordinater blir E

$0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$,

så enligt formeln för integration i sfäriska koordinater,

$dV = \rho^2 \sin\phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta$ blir

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbb{F}\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi} 3\rho^2 \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta =$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \Big[-\rho^4 \cos\phi \Big]_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\rho \, d\theta = 6 \int_0^{2\pi} \Big[\frac{\rho^5}{5} \Big]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta = \frac{6}{5} \cdot 2\pi = \frac{12\pi}{5}$$

Svar: flödet är $12\pi/5$ (volymenheter/tidsenhet)