

Tentamensskrivning i
Matematisk Analys i Flera Variabler,
20 augusti 2015, 8³⁰ – 12³⁰

1. Beräkna längden av kurvan

$$x = 3t^2, y = 8(t+1)^{3/2}, \quad 1 < t < 3$$

2. Beräkna krökningsradien för kurvan

$$x = 2t, y = 3t^2, z = 3t^3$$

i punkten $(x, y, z) = (1, \frac{3}{4}, \frac{3}{8})$.

3. Uppskatta differensen

$$\arcsin \frac{1,01^2}{3,98} - \arcsin \frac{1}{4}$$

med hjälp av approximationssatsen.

4. Bestäm lokala max.-, min.- och sadelpunkter för funktionen

$$f(x, y) = x^2 + 6x - xy + \ln\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

5. Beräkna kurvintegralen

$$\int_C 3xy^2 dx + (x^2 + 4y^3) dy$$

där C är parabelbågen $y^2 = 2x$ från punkten $(1/2, -1)$ till punkten $(1/2, 1)$.

6. Beräkna

$$\iint_D \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} dx dy$$

där D är området $x^2 + y^2 \leq 4, y > 0$.

7. Beräkna arean av den del av ytan $f(x, y) = xy$ vars projektion på xy -planet är följande område $x^2 + y^2 \leq 3, y > 0, y < x\sqrt{3}$.

8. Beräkna volymen av den kropp som alstras då kurvan

$$y = x \cdot \ln(2x), \quad 1 \leq x \leq e$$

roterar kring x -axeln.

Alla problem utom två sista ger 6p max. Varje av dem två sista problemen ger 7p max.

Lycka till!

FORMELSAMLING I FLERVARIABELANALYS

Kurva i rummet på parameterform:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \text{ eller med vektorbet. } \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad \text{Speciellt} \quad \begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \\ z = z_0 + v_z t \end{cases}$$

Räta linjens ekvation: (tangens och normal)

Area under plan kurva på parameterform: $\int_{x_1}^{x_2} y \, dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \dot{x}(t) \, dt$.

Polär form $r = r(\theta)$ skrivs på parameterform: $\begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta \\ y = r(\theta) \sin \theta \end{cases}$

Båglängd för kurva på parameterform: $L = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{r}}(t)| \, dt$, speciellt

i planet: $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt$, eller $L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$

och i rummet: $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \, dt$.

Tyngdpunkt för kurva i planet:

$$x_T = \frac{1}{L} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt, \quad y_T = \frac{1}{L} \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt$$

Krökning för kurva: $K(t) = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3}$,

speciellt i planet: $K(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$.

Krökningsradie: $R = \frac{1}{K}$

Torsion: $\tau = \frac{(\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)) \cdot \dddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|^2}$

Approximationssatsen: $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx \underbrace{f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y}_{df \text{ differential}}$
 $\Delta f \text{ differens}$

Kedjeregeln: $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$, $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \text{och} \\ \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \text{och} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right.$$

Taylor's formel i två variabler:

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \\ \frac{1}{2!} [f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2] + \\ \frac{1}{3!} [f'''_{xxx}(a, b)(x - a)^3 + 3f'''_{xxy}(a, b)(x - a)^2(y - b) + \\ 3f'''_{xyy}(a, b)(x - a)(y - b)^2 + f'''_{yyy}(a, b)(y - b)^3] + \dots$$

Max.- , min.- och sadelpunkter:

$$f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0 , \quad D = \begin{vmatrix} f''_{xx}(a, b) & f''_{xy}(a, b) \\ f''_{yx}(a, b) & f''_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

$$D > 0 \text{ och } \begin{cases} f''_{xx}(a, b) > 0 \Rightarrow (a, b) \text{ lok. minp.} \\ f''_{xx}(a, b) < 0 \Rightarrow (a, b) \text{ lok. maxp.} \end{cases} , \quad D < 0 \Rightarrow (a, b) \text{ sadelp.}$$

Lagranges multiplikatormetod:

$f(x, y)$ maximeras eller minimeras under bivillkoret $g(x, y) = 0$.

Bilda $H = f - \lambda g$ och lös ekv.syst. $H'_x = 0$, $H'_y = 0$ och $g = 0$.

Gradient: $\text{grad } f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ **Riktningderivata:** $f'_e = \mathbf{e} \cdot \text{grad } f(a, b, c)$

$$[-|\text{grad } f(a, b, c)| \leq f'_e \leq |\text{grad } f(a, b, c)|]$$

Nivåyta: $g(x, y, z) = z - f(x, y) = C$, **Normalvektor:** $\mathbf{n} = \text{grad } g$,

(Tangent-) planets ekvation: $n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$.

Skivformeln: $V = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx$ där x-axeln är rotationsaxel.

Guldins regel: Rotationsvolymen = Arean · Tyngdpunktens väg .

Dubbelintegral, speciellt: $\iint_D dx dy = A_D$.

Variabelsubstitution: $dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$.

Speciellt polära koord: $\begin{cases} x = r \cos v \\ y = r \sin v \end{cases}$, $x^2 + y^2 = r^2$, $dx dy = r dr dv$.

Geometriskt moment med avseende på linjen $x = a$ resp. $y = b$:

$$M_y = \iint_D (x - a) dx dy \quad \text{resp.} \quad M_x = \iint_D (y - b) dx dy .$$

Tyngdpunkt för yta i planet: $x_T = \frac{1}{A_D} \iint_D x dx dy$, $y_T = \frac{1}{A_D} \iint_D y dx dy$.

Tröghetsmoment med avseende på linjen $x = a$ resp. $y = b$:

$$I_y = \iint_D (x - a)^2 dx dy \quad \text{resp.} \quad I_x = \iint_D (y - b)^2 dx dy .$$

Polärt tröghetsmoment med avseende på punkten (a, b) :

$$I_\theta = \iint_D [(x - a)^2 + (y - b)^2] dx dy = I_y + I_x .$$

Trippelintegral, speciellt: $\iiint_D dx dy dz = V_D$.

Variabelsubstitution, speciellt sfäriska (rymdpolära) koordinater:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos v \\ y = r \sin \theta \sin v \\ z = r \cos \theta \end{cases} , \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2 , \quad dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta dv .$$

och cylinderkoordinater:

$$\begin{cases} x = r \cos v \\ y = r \sin v \\ z = w \end{cases} , \quad x^2 + y^2 = r^2 , \quad dx dy dz = r dr dv dw .$$

Tyngdpunkt för kropp i rummet:

$$x_T = \frac{1}{V_D} \iiint_D x \, dx \, dy \, dz, \quad y_T = \frac{1}{V_D} \iiint_D y \, dx \, dy \, dz, \quad z_T = \frac{1}{V_D} \iiint_D z \, dx \, dy \, dz.$$

Kurvintegral: $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P \, dx + Q \, dy$.

Greens formel: $\oint_C P \, dx + Q \, dy = \iint_D (Q'_x - P'_y) \, dx \, dy$.

där C är sluten, ett varv moturs, runt D.

$\mathbf{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ **gradientfält** om **potentialfunktion** $\Phi(x,y)$:

$$\mathbf{F} = (P, Q) = (\Phi'_x, \Phi'_y) = \text{grad } \Phi.$$

Exakt differentialform: $d\Phi = \Phi'_x \, dx + \Phi'_y \, dy = P \, dx + Q \, dy$.

Då gäller: $\int_C P \, dx + Q \, dy = \int_C d\Phi = [\Phi]_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)}$

Exakt differentialekvation: $d\phi(x,y) = P(x,y) \, dx + Q(x,y) \, dy = 0$

har allmän lösning $\phi(x,y) = C$.

Yta i rummet på parameterform:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{eller med vektorbeteckning} \\ \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)). \end{array}$$

har **normalvektorn:** $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$.

Arean av en yta på parameterform: $A_S = \iint_{D_{uv}} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, du \, dv$.

Arean av en funktionsyta: $A_S = \iint_D \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} \, dx \, dy$.

Arean av en rotationsyta: $A_S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$

där x-axeln är rotationsaxel.

Ytintegral av funktionen g över ytan S :

$$\iint_S g \, dS = \iint_{D_{uv}} g(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, du \, dv$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{eller} \\ \text{spec.} \end{array} \right\} = \iint_D g(x, y, f(x, y)) \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} \, dx \, dy$$

Tyngdpunkt för yta i rummet:

$$x_T = \frac{1}{A_S} \iint_S x \, dS \quad , \quad y_T = \frac{1}{A_S} \iint_S y \, dS \quad , \quad z_T = \frac{1}{A_S} \iint_S z \, dS$$

Normalytintegral av vektorfältet \mathbf{F} över ytan S :

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{D_{uv}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) \, du \, dv$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{eller} \\ \text{spec.} \end{array} \right\} = \iint_S P(x, y, z) \, dy \, dz + Q(x, y, z) \, dz \, dx + R(x, y, z) \, dx \, dy$$

Källtätet (-styrka): $\operatorname{div} \mathbf{F} = P'_x + Q'_y + R'_z$

Gauss' divergenssats: $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz$

där S är sluten med normal utåt.

Virvelvektor: $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$

Stokes' sats: $\oint_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{D_{uv}} \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) \, du \, dv$

där C är sluten kurva runt S .

$\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{F} = \operatorname{grad} \Phi$

Rotationsvolym då kurvan roterar kring
y-axeln: $y=f(x) \Rightarrow V = \pi \int_a^b x^2 f'(x) dx$

Arean av en rotationsyta

$$A_s = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

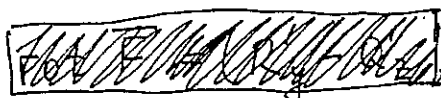
där x-axeln är rotationsaxel för

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t_1 < t < t_2$$

Kurvintegral i 3D:

$$A = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy + R dz \quad \text{med}$$

$$\vec{F} = (P, Q, R), \quad C = (x(t), y(t), z(t)) \\ t_0 \leq t \leq t_1$$



$$A = \int_{t_0}^{t_1} (P(x, y, z) \cdot \dot{x} + Q(x, y, z) \cdot \dot{y} + R(x, y, z) \cdot \dot{z}) dt$$

Om $\text{rot } \vec{F} = 0$, existerar Φ sådan att

$$\vec{F} = \text{grad } \Phi \quad \text{och} \quad \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Phi(\text{ändpunkt}) - \Phi(\text{startpunkt}).$$

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ~~är~~ är oberoende av C mellan ~~ändpunkterna~~
 $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ och $(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$, om $\text{rot } \vec{F} = 0$.

VIKTIGA :: DERIVATOR OCH INTEGRALER

De derivator och integraler som presenteras här förväntas ni kunna utantill.

DERIVATOR ::

Funktion	Derivata	kommentar
x^r	rx^{r-1}	$r \neq 0$
e^x	e^x	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	eller $\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	

PRIMITIVA FUNKTIONER ::

f	$\int f dx$	kommentar
x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + C$	$r \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	
$\sin x$	$-\cos x + C$	
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\frac{1}{1+(ax)^2}$	$\frac{1}{a} \arctan ax + C$	
$\ln x$	$x \ln x - x + C$	partiell integration!
$\frac{1}{\sqrt{1-(ax)^2}}$	$\frac{1}{a} \arcsin(ax) + C$	
e^x	$e^x + C$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	