Matematik
Chalmers
A. Stolin

Hjälpmedel:
Typgodkänd räknedosa och
formelsamling i flervariabelanalys.
Telefonvakt: Alexander Stolin
031 772 5881

Tentamensskrivning i
Matematisk Analys i Flera Variabler, LMA017

Måndagen den 4 januari 2016, $8^{30} - 12^{30}$

1. Beräkna gränsvärdena:

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$, (5p)

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{e^{x^2+y^2}-1}$. (2p)

2. (a) Beräkna krökningsradien för spiralen $\overline{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$. (5p)

   (b) För vilket t är radien maximal? (2p)

3. Bestäm lokala extrempunkter samt terasspunkter (sadelpunkter) för $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$. (6p)

4. Beräkna längden av kurvan $y = x\sqrt{x}$, $0 \le x \le 13$. (6p)

5. Bestäm tyngpunkten för halvcirkelskivan $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$. (6p)

6. Planet $x/2 + y/2 + z/2 = 1$ delar ellipsoiden $x^2/4 + y^2/4 + z^2/81 < 1$ i två delar. Bestäm volymen av den mindre delen. (7p)

7. Beräkna kurvintegralen $\int_C 2xydx + (x^2 - y^2)dy$ längs kurvan $C : x = 2\sqrt{1 - y^2/9}$ mellan punkterna $(0, -3)$ och $(0, 3)$. (6p)

8. Beräkna normalytintegralen av vektorfältet $\overline{F}$ över ytan S: $\iint_S \overline{F} \bullet \overline{dS}$, där $\overline{F} = (x^2y, y - xy^2, 3z)$, $x > 0, y > 0, z > 0$. (7p)

Betygsgränser: för 3 krävs 20p, för 4 krävs 60% av den totala poängsumman, för 5 krävs 80%. Lycka till!

FORMELSAMLING I FLERVARIABELANALYS

Kurva i rummet på parameterform:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ eller med vektorbet. $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Speciellt **Räta linjens ekvation:** (tangent och normal)
$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \\ z = z_0 + v_z t \end{cases}$$

Area under plan kurva på parameterform: $\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,\dot{x}(t)\,dt$.

Polär form $r = r(\theta)$ skrivs på parameterform: $\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$

Båglängd för kurva på parameterform: $L = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,dt$, speciellt

i planet: $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$, eller $L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$

och i rummet: $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$.

Tyngdpunkt för kurva i planet:

$$x_T = \frac{1}{L}\int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt \quad , \quad y_T = \frac{1}{L}\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$$

Krökning för kurva: $K(t) = \dfrac{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3}$,

speciellt i planet: $K(x) = \dfrac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$.

Krökningsradie: $R = \dfrac{1}{K}$

Torsion: $\tau = \dfrac{(\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)) \cdot \dddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|^2}$

Approximationssatsen: $\underbrace{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}_{\Delta f \text{ differens}} \approx \underbrace{f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y}_{df \text{ differential}}$

Kedjeregeln: $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$, $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \text{och} \\ \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \text{och} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Taylors formel i två variabler:

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) + \\ & \frac{1}{2!}[f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2] + \\ & \frac{1}{3!}[f'''_{xxx}(a,b)(x-a)^3 + 3f'''_{xxy}(a,b)(x-a)^2(y-b) + \\ & \quad 3f'''_{xyy}(a,b)(x-a)(y-b)^2 + f'''_{yyy}(a,b)(y-b)^3] + \dots \end{aligned}$$

Max.- , min.- och sadelpunkter:

$f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$, $D = \begin{vmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{yx}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$

$D > 0$ och $\begin{cases} f''_{xx}(a,b) > 0 \Rightarrow (a,b) \text{ lok. minp.} \\ f''_{xx}(a,b) < 0 \Rightarrow (a,b) \text{ lok. maxp.} \end{cases}$, $D < 0 \Rightarrow (a,b)$ sadelp.

Lagranges multiplikatormetod:

$f(x,y)$ maximeras eller minimeras under bivillkoret $g(x,y) = 0$.
Bilda $H = f - \lambda g$ och lös ekv.syst. $H'_x = 0$, $H'_y = 0$ och $g = 0$.

Gradient: $\text{grad } f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ **Riktningsderivata:** $f'_e = \mathbf{e} \cdot \text{grad } f(a,b,c)$

$[-|\text{grad } f(a,b,c)| \le f'_e \le |\text{grad } f(a,b,c)|]$

Nivåyta: $g(x,y,z) = z - f(x,y) = C$, **Normalvektor:** $\mathbf{n} = \text{grad } g$,

(Tangent-) planets ekvation: $n_x(x-x_0) + n_y(y-y_0) + n_z(z-z_0) = 0$.

Skivformeln: $V = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2\, dx$ där x-axeln är rotationsaxel.

Guldins regel: Rotationsvolymen = Arean · Tyngdpunktens väg .

Dubbelintegral, speciellt: $\iint_D dxdy = A_D$.

Variabelsubstitution: $dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$.

Speciellt polära koord: $\begin{cases} x = r\cos v \\ y = r\sin v \end{cases}$, $x^2 + y^2 = r^2$, $dxdy = r\,dr\,dv$.

Geometriskt moment med avseende på linjen $x = a$ resp. $y = b$:

$M_y = \iint_D (x - a)\, dxdy$ resp. $M_x = \iint_D (y - b)\, dxdy$.

Tyngdpunkt för yta i planet: $x_T = \frac{1}{A_D}\iint_D x\, dxdy$, $y_T = \frac{1}{A_D}\iint_D y\, dxdy$.

Tröghetsmoment med avseende på linjen $x = a$ resp. $y = b$:

$I_y = \iint_D (x - a)^2 dxdy$ resp. $I_x = \iint_D (y - b)^2 dxdy$.

Polärt tröghetsmoment med avseende på punkten (a, b):

$I_0 = \iint_D [(x - a)^2 + (y - b)^2]\, dxdy = I_y + I_x$.

Trippelintegral, speciellt: $\iiint_D dxdy\,dz = V_D$.

Variabelsubstitution, speciellt sfäriska (rymdpolära) koordinater:

$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos v \\ y = r\sin\theta\sin v \\ z = r\cos\theta \end{cases}$, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $dxdy\,dz = r^2\sin\theta\; dr\,d\theta\,dv$.

och cylinderkoordinater:

$\begin{cases} x = r\cos v \\ y = r\sin v \\ z = w \end{cases}$, $x^2 + y^2 = r^2$, $dxdy\,dz = r\,dr\,dv\,dw$.

Tyngdpunkt för kropp i rummet:

$$x_T = \frac{1}{V_D}\iiint_D x\,dx\,dy\,dz\,,\quad y_T = \frac{1}{V_D}\iiint_D y\,dx\,dy\,dz\,,\quad z_T = \frac{1}{V_D}\iiint_D z\,dx\,dy\,dz.$$

Kurvintegral: $W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy$.
i 2D

Greens formel: $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$.
där C är sluten, ett varv moturs, runt D.

$\mathbf{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ **gradientfält** om **potentialfunktion** $\Phi(x,y)$:
$\mathbf{F} = (P, Q) = (\Phi'_x, \Phi'_y) = \text{grad}\,\Phi$.

Exakt differentialform: $d\Phi = \Phi'_x\,dx + \Phi'_y\,dy = P\,dx + Q\,dy$.

Då gäller: $\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C d\Phi = \left[\Phi\right]_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}$

Exakt differentialekvation: $d\phi(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

har allmän lösning $\phi(x,y) = C$.

Yta i rummet på parameterform:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

eller med vektorbeteckning
$\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

har **normalvektorn:** $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$.

Arean av en yta på parameterform: $A_S = \iint_{D_{uv}} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|\,du\,dv$.

Arean av en funktionsyta: $A_S = \iint_D \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}\,dx\,dy$.

Arean av en rotationsyta: $A_S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$

där x-axeln är rotationsaxel.

Ytintegral av funktionen g över ytan S:

$$\iint_S g\,dS = \iint_{D_{uv}} g(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\,|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|\,du\,dv$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{eller}\\ \text{spec.}\end{matrix}\right\} = \iint_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}\,dx\,dy$$

Tyngdpunkt för yta i rummet:

$$x_T = \frac{1}{A_S}\iint_S x\,dS \quad , \quad y_T = \frac{1}{A_S}\iint_S y\,dS \quad , \quad z_T = \frac{1}{A_S}\iint_S z\,dS \; .$$

Normalytintegral av vektorfältet **F** över ytan S:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{D_{uv}} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)\,du\,dv$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{eller}\\ \text{spec.}\end{matrix}\right\} = \iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy$$

Källtäthet (-styrka): $\operatorname{div}\mathbf{F} = P'_x + Q'_y + R'_z$

Gauss' divergenssats: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz$

där S är sluten med normal utåt.

Virvelvektor: $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R'_y - Q'_z,\; P'_z - R'_x,\; Q'_x - P'_y)$

Stokes' sats: $\displaystyle\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{D_{uv}} \operatorname{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)\,du\,dv$

där C är sluten kurva runt S.

$\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{F} = \operatorname{grad}\Phi$.

Rotationsvolym då kurvan roterar kring y-axeln: $y=f(x) \Rightarrow V=\pi\int_a^b x^2 f'(x)\,dx$

Arean av en rotationsyta

$$A_s = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$$

där x-axeln är rotationsaxel för

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t_1<t<t_2$$

Kurvintegral i 3D:

$$A = \int_C \bar{F}\bullet d\bar{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \quad \text{med}$$

$$\bar{F} = (P, Q, R), \quad C = (x(t), y(t), z(t)), \; t_0 \le t \le t_1$$

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \left(P(x,y,z)\cdot\dot{x} + Q(x,y,z)\cdot\dot{y} + R(x,y,z)\cdot\dot{z}\right)dt.$$

Om $\operatorname{rot}\bar{F} = 0$, existerar φ sådan att

$\bar{F} = \operatorname{grad}\varphi$ och $\int_C \bar{F}\bullet d\bar{r} = \varphi(\text{ändpunkt}) - \varphi(\text{startpunkt})$.

$\int_C \bar{F}\bullet d\bar{r}$ är oberoende av C mellan $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ och $(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$, om $\operatorname{rot}\bar{F}=0$.

VIKTIGA :: DERIVATOR OCH INTEGRALER

De derivator och integraler som presenteras här förväntas ni kunna utantill.

DERIVATOR ::

Funktion	Derivata	kommentar
x^r	rx^{r-1}	$r \neq 0$
e^x	e^x	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1+\tan^2 x$	eller $\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	

PRIMITIVA FUNKTIONER ::

f	$\int f\,dx$	kommentar
x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + C$	$r \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	
$\sin x$	$-\cos x + C$	
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\frac{1}{1+(ax)^2}$	$\frac{1}{a}\arctan ax + C$	
$\ln x$	$x\ln x - x + C$	partiell integration!
$\frac{1}{\sqrt{1-(ax)^2}}$	$\frac{1}{a}\arcsin(ax) + C$	
e^x	$e^x + C$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	

Standardgränsvärden

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Dubbla vinkeln

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Addition & subtraktionsformler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Vektorer

Tangent: $\mathbb{T}(t) = \dfrac{\mathbb{r}'(t)}{|\mathbb{r}'(t)|}$

Normal: $\mathbb{N}(t) = \dfrac{\mathbb{T}'(t)}{|\mathbb{T}'(t)|}$

Binormal: $\mathbb{B}(t) = \mathbb{T}(t) \times \mathbb{N}(t)$

Tangentplanets ekvation: ($z = f(x,y)$ på $P(x_0, y_0, z_0)$)

$$z - z_0 = f_x'(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Partiell integration

$$\int f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)] - \int F(x)g'(x)\,dx$$

Kvotregeln

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$