Lösningar, Övningstenta 1 - 2016, LMA017

1) Låt C vara kurvan som är skärningen mellan ytan $z=y^2$ och planet $x=y$.

a) Bestäm en parametrisering $\mathbf{r}(t)$ av kurvan C.

b) Beskriv en formel för tangentlinjen till C i punkten $(2,2,4)$.

---

a) På skärningen har vi: $z=y^2$ och $x=y$, dvs y-värdet bestämmer x och z. Kan då ta y som parameter t:

$$\mathbf{r}(t)=(t,t,t^2).$$

<u>Svar:</u> $\mathbf{r}(t)=(t,t,t^2)$

b) Tangentlinjen till C i punkten $\mathbf{r}(t_0)$ ges av

$$L(s)=\mathbf{r}(t_0)+s\,\mathbf{r}'(t_0).$$

Bestämmer först t_0:

$$\mathbf{r}(t_0)=(t_0,t_0,t_0^2)=(2,2,4)\Rightarrow t_0=2.$$

$$\mathbf{r}'(t)=(1,1,2t)\Rightarrow \mathbf{r}'(2)=(1,1,4)$$

Så tangentlinjen blir: $\mathbf{r}(2)+s\,\mathbf{r}'(2)=(2,2,4)+s(1,1,4)$

<u>Svar:</u> $(2+s,2+s,4+4s)$

2) Låt $f(u,v) = \sin(2u)e^v$, där $u = 4s^2 + 5t^3$ och $v = 5s^3 + 4t^2$.

Beräkna $\frac{\partial}{\partial s}\Big(f(u(s,t), v(s,t))\Big)$

Kedjeregeln: $f = f(u,v)$, $u = u(s,t)$, $v = v(s,t)$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \cos(2u)\cdot 2e^v = 2\cos(8s^2 + 10t^3)e^{5s^3+4t^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \sin(2u)e^v = \sin(8s^2 + 10t^3)e^{5s^3+4t^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 8s, \qquad \frac{\partial v}{\partial s} = 15s^2$$

så
$$\frac{\partial f}{\partial s} = 2\cos(8s^2 + 10t^3)e^{5s^3+4t^2}\cdot 8s + \sin(8s^2 + 10t^3)e^{5s^3+4t^2}\cdot 15s^2$$

Svar: $\Big(16s\cos(8s^2 + 10t^3) + 15s^2\sin(8s^2 + 10t^3)\Big)e^{5s^3+4t^2}$

3) Bestäm globala maximum och minimum av funktionen

$$f(x,y) = 8x^2 - 8x + 9y^2 - 6y$$

på kvadraten $D = [0,1] \times [0,1]$.

Globala max och min är antingen

1) kritiska punkter inuti D.

2) kritiska punkter av f längs randkurva till D.

3) ett "hörn" på randen till D (där två randkurvor möts).

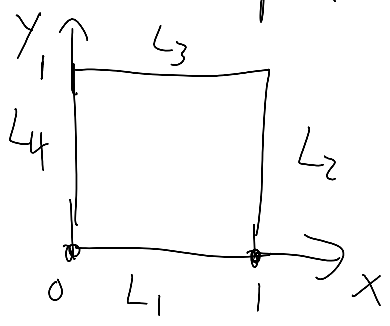
1) Kritiska punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 16x - 8 = 0 \iff x = 1/2 \\ f'_y = 18y - 6 = 0 \iff y = 1/3. \end{cases}$$

Kritisk punkt $(1/2, 1/3) \in D$.

$$\boxed{f(1/2, 1/3) = 2 - 4 + 1 - 2 = -3}$$

2) Kritiska punkter längs randkurvor:



$\underline{L_1 = \{ (x,0) \mid 0 < x < 1 \}}$

$g_1(x) = f(x,0) = 8x^2 - x.$ Krit. pkter: $g_1'(x) = 16x - 8 = 0$
$\Rightarrow x = 1/2.$

$$\boxed{g_1(1/2) = f(1/2, 0) = 2 - 4 = -2}$$

$\underline{L_2 = \{ (1,y) \mid 0 < y < 1 \}}$

$g_2(y) = f(1,y) = 9y^2 - 6y$ krit. pkter: $g_2'(y) = 18y - 6 = 0$
$\Rightarrow y = 1/3.$

$$\boxed{g_2(1/3) = f(1, 1/3) = 1 - 2 = -1}$$

$\underline{L_3 = \{ (x,1) \mid 0 < x < 1 \}}.$

$g_3(x) = 8x^2 - 8x + 3$ krit. pkter: $g_3'(x) = 16x - 8 = 0$
$\Rightarrow x = 1/2$

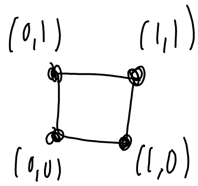
$$\boxed{g_3(1/2) = f(1/2, 1) = -2 + 3 = 1.}$$

$\underline{L_4 = \{ (0,y) \mid 0 < y < 1 \}}$

$g_4(y) = f(0,y) = 9y^2 - 6y$ krit. pkter $g_3'(y) = 18y - 6 = 0$
$\Rightarrow y = 1/3$

$$\boxed{g_4(1/3) = f(0, 1/3) = 3 - 2 = 1}$$

3) Hörn



$f(0,0) = 0$

$f(1,0) = 0$

$f(1,1) = 3$

$f(0,1) = 3$

Jämför nu alla funktionsvärden i rutorna.

<u>Svar:</u> Globalt minimum -3 i $(1/2, 1/3)$

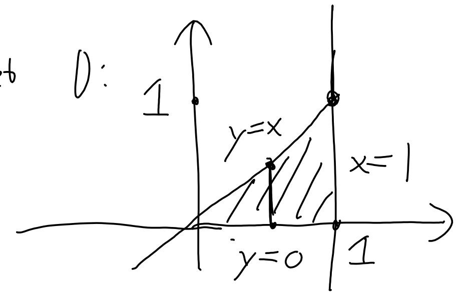
Globalt maximum 3 i $(0,1)$ och $(1,1)$

4) Beräkna

$$\iint_D \sin(x^2)\, dA,$$

där D är området som begränsas av kurvorna $y=x$, $x=1$ och $y=0$.

Ritar området D:



D kan då beskrivas: $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$.

Upprepad integration:

$$\iint_D \sin(x^2)\, dA = \int_0^1 \int_0^x \sin(x^2)\, dy\, dx = \int_0^1 \Big[\sin(x^2)\, y \Big]_0^x dx =$$

$$= \int_0^1 \sin(x^2)\, x\, dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{var. subst.} \\ t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=1 \end{array} \right\} = \int_0^1 \sin(t) \frac{dt}{2} =$$

$$= \left[\frac{-\cos(t)}{2} \right]_0^1 = \frac{-\cos(1) + 1}{2}$$

Svar: $\dfrac{1 - \cos(1)}{2}$

5) Beräkna kurvintegralen $\int_C xy+z\,ds$,

där C är kurvan

$(\cos(t), \sin(t), 2t)$, $0 \le t \le \pi/2$.

Kurvintegral av $f(x,y,z)$ längs $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$

ges av $\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt$.

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 2)$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1 \text{ (trig. ettan)}} + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Så $\int_C xy+z\,ds = \int_0^{\pi/2} (\underbrace{\cos t \sin t}_{=\frac{\sin(2t)}{2}} + 2t)\sqrt{5}\,dt$

$$= \sqrt{5}\left[\frac{-\cos(2t)}{2\cdot 2} + t^2\right]_0^{\pi/2} = \sqrt{5}\left(-\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{4}\right)$$

Svar: $\sqrt{5}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{4}\right)$

6) Avgör om vektorfälten

$$\mathbb{F}(x,y) = \left(\sin(y) + xy + \sqrt{1+x^2},\ x^2/2 + x\cos(y) \right)$$

och

$$\mathbb{G}(x,y) = \left(\sin(y) + xy + \sqrt{1+y^2},\ x^2/2 + x\cos(y) \right)$$

är konservativa.

Ett vektorfält $\mathbb{F} = (P, Q)$ definierat på hela $\mathbb{R}^2$ är konservativt precis om $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

$\mathbb{F} = (P,Q)$: $\quad \frac{\partial P}{\partial y} = \cos y + x$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = x + \cos y$$

Lika $\Rightarrow$ $\mathbb{F}$ konservativt.

$\mathbb{G} = (R,S)$ $\quad \frac{\partial R}{\partial y} = \cos y + x + \frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}}$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = x + \cos y.$$

Olika $\Rightarrow$ $\mathbb{G}$ ej konservativt.

Svar: $\mathbb{F}$ konservativt, $\mathbb{G}$ ej konservativt

7) Vektorfältet

$$\mathbb{F} = \left(y^2\cos(xy) + y^2,\ 5y^4 + \sin(xy) + xy\cos(xy) + 2xy\right)$$

är konservativt.

a) Bestäm en potential f till $\mathbb{F}$.

b) Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$, där C

är den räta linjen från $(0,0)$ till $(\pi, 1)$.

---

a) Bestämmer först en funktion $f_0(x,y)$ s.a.

$$(f_0)'_x = y^2\cos(xy) + y^2.$$

Får $f_0 = \int y^2\cos(xy) + y^2\,dx = y\sin(xy) + xy^2.$

Allmänna lösningen till $f'_x(x,y) = y^2\cos(xy) + y^2$ blir då:

$$f(x,y) = f_0(x,y) + g(y) = y\sin(xy) + xy^2 + g(y)$$

Sätter in detta i ekvationen

$$f'_y(x,y) = 5y^4 + \sin(xy) + xy\cos(xy) + 2xy$$

$$(f_0)'_x(x,y) + g'(y) = \sin(xy) + xy\cos(xy) + 2xy =$$

$$= 5y^4 + \sin(xy) + xy\cos(xy) + 2xy$$

$$\Rightarrow \quad g'(y) = 5y^4 \quad \Rightarrow \quad g(y) = y^5 + C.$$

Svar: En potential är $f(x,y) = y\sin(xy) + xy^2 + y^5$.

b) Huvudsatsen för kurvintegraler:

C kurva $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$,

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

Så med C och f som ovan,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\pi, 1) - f(0,0) = \pi + 1$$

Svar: $\pi + 1$.