Lösningar, Övningstenta 2 - 2016, LMA017

den 14 oktober 2016 16:02

1) Låt $f(x,y) = e^{x^2 y} - 4y$.

a) Bestäm i vilken riktning som f växer mest i punkten (1,1)

b) Ge en formel för tangentplanet till grafen $z=f(x,y)$ i punkten $(x,y,z)=(1,1,e-4)$.

c) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten (1,1) och riktningen $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

---

a) $\nabla f = (f'_x, f'_y) = \left(2xe^{x^2y},\ x^2e^{x^2y} - 4\right)$

$\nabla f(1,1) = (2e, e-4)$, $|\nabla f(1,1)| = \sqrt{4e^2+(e-4)^2}$

<u>Svar:</u> f växer mest i gradientens riktning,

$$\frac{\nabla f(1,1)}{|\nabla f(1,1)|} = \frac{(2e, e-4)}{\sqrt{4e^2+(e-4)^2}}$$

(eller vilken som helst positiv multipel av gradienten $c\nabla f(1,1)$, t.ex. $(2e, e-4)$ eftersom pekar i samma riktning)

b) Ekvation för tangentplan till graf $z=f(x,y)$ i (a,b):

$$z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

$$z = e-4 + 2e(x-1) + (e-4)(y-1)$$

<u>Svar:</u> $z = e-4 + 2e(x-1) + (e-4)(y-1)$

c) Riktningsderivata i riktning $\mathbb{V}$, $(|\mathbb{V}| = 1)$:

$$\mathbb{D}_{\mathbb{V}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \bullet \mathbb{V}$$

$$\nabla f(1,1) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2e \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(e-4)$$

$$= 3e \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}.$$

Svar: $\mathbb{D}_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(1,1) = 3e \frac{1}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}.$

2) Antag att en tunn tråd går längs med linjen $(x(t), y(t)) = (t, 1+2t)$, $0 \le t \le 1$, och har densitet $1-x$.

Beräkna masscentrum för tråden.

Masscentrum: $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m} \right)$ $\quad m = \int_C \rho(x,y)\,ds$

$$M_x = \int_C x\rho(x,y)\,ds \qquad M_y = \int_C y\rho(x,y)\,ds$$

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = \sqrt{1^2+2^2}\,dt = \sqrt{5}\,dt.$$

$$m = \int_C (1-x)\,ds = \int_0^1 (1-t)\sqrt{5}\,ds = \sqrt{5}\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$M_x = \int_C x(1-x)\,ds = \int_0^1 t(1-t)\sqrt{5}\,dt = \sqrt{5}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{6}.$$

$$M_y = \int_C y(1-x)\,ds = \int_0^1 (1+2t)(1-t)\sqrt{5}\,dt = \int_0^1 (1+t-2t^2)\sqrt{5}\,dt =$$

$$= \sqrt{5}\left[t + t^2/2 - \frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = \sqrt{5}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = \sqrt{5}\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) = \sqrt{5}\cdot\frac{5}{6}.$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\sqrt{5}/6}{\sqrt{5}/2}, \frac{5\sqrt{5}/6}{\sqrt{5}/2} \right) = \left(\frac{2}{6}, \frac{2\cdot 5}{6} \right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right).$$

Svar: $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right)$.

3) Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_E (1-x-y)\,dV,$$

där E är tetraedern $E=\{(x,y,z) \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 1-x-y\}$.

Använder upprepad integration:

$$\iiint_E (1-x-y)\,dV = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} 1-x-y\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-x}\Big[(1-x-y)z\Big]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x} (1-x-y)^2\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{3}\,dx =$$

$$= \left[-\frac{(1-x)^4}{4\cdot 3}\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Svar: $\frac{1}{12}$

4) Bestäm tangentplanet till den parametriserade ytan

$\mathbb{r}(u,v) = (u, u^2 + \sin(v), e^v)$

i punkten $\mathbb{r}(1,0) = (1,1,1)$.

Tangentplanet till $\mathbb{r}(u,v)$ i $\mathbb{r}(u_0,v_0) = (a,b,c)$ ges av:

$$\mathbb{n} \bullet (x-a, y-b, z-c) = 0,$$

där: $\mathbb{n} = \mathbb{r}_u'(u_0,v_0) \times \mathbb{r}_v'(u_0,v_0)$.

$\mathbb{r}_u'(u,v) = (1, 2u, 0)$ $\quad \mathbb{r}_u'(1,0) = (1,2,0)$

$\mathbb{r}_v'(u,v) = (0, \cos v, e^v)$ $\quad \mathbb{r}_v'(1,0) = (0,1,1)$

$$\mathbb{n} = \mathbb{r}_u'(1,0) \times \mathbb{r}_v'(1,0) = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-1,1)$$

$$\mathbb{n} \bullet (x-1, y-1, z-1) = 2(x-1) - (y-1) + (z-1) = 0$$

<u>Svar:</u> $2x - y + z = 2$.

5) Beräkna ytintegralen $\iint_{dS}(1+4z)\,dS$ där S är paraboloiden $z=x^2+y^2$ över cirkelskivan $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2\}$.

S grafen till $f(x,y)=x^2+y^2$: $\mathbf{r}(x,y)=(x,y,x^2+y^2)$. $(x,y)\in D$.

$dS=|\mathbf{r}_x'\times\mathbf{r}_y'|\,dA$

$$\mathbf{r}_x'\times\mathbf{r}_y'=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & 2x\\ 0 & 1 & 2y\end{vmatrix}=(-2x,-2y,1)$$

$$|\mathbf{r}_x'\times\mathbf{r}_y'|=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

$$\iint_S 1+4z\,dS=\iint_D\left(1+4(x^2+y^2)\right)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dA=$$

$$=\iint_D(1+4r^2)^{3/2}\,dA=\left\{\begin{array}{c}\text{polära koordinater,}\\ dA=r\,d\theta\,dr\\ D\text{ i polära koord:}\\ 0\le r\le\sqrt{2},\ 0\le\theta\le 2\pi\end{array}\right\}=$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(1+4r^2)^{3/2}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{\sqrt{2}}2\pi(1+4r^2)^{3/2}\,r\,dr=$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = 1+4r^2 \\ dt = 8r\,dr \\ r=0 \Rightarrow t=1 \\ r=\sqrt{2} \Rightarrow t=9 \end{array} \right\} = 2\pi \int_1^9 t^{3/2} \frac{dt}{8} = \frac{\pi}{4} \left[\frac{t^{5/2}}{5/2} \right]_1^9 =$$

$$\frac{\pi}{10}\left(9^{5/2} - 1\right)$$

(som kan, men inte behöver förenklas mer)

$$= \frac{\pi}{10}\left(3^5 - 1\right) = \frac{\pi}{10}\left(3 \cdot 81 - 1\right) = \frac{\pi}{10}\left(243 - 1\right) = \frac{\pi}{10} \cdot 242 =$$

$$= \frac{\pi}{5} \cdot 121.$$

<u>Svar:</u> $\frac{\pi}{10}\left(9^{5/2} - 1\right) = \frac{\pi}{5} \cdot 121.$

6) Beräkna flödet $\iint_S \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}$ ut ur ytan S

som begränsar kuben $E=[0,1]\times[0,2]\times[0,3]$

där $\mathbb{F}$ är vektorfältet $\mathbb{F}(x,y)=(x^2+e^{y^2},\ y,\ z)$.

Använder divergenssatsen: Om S området som begränsar

E med orientering ut från E, så

flödet ut ur $E = \iint_S \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \iiint_E \operatorname{div}\mathbb{F}\,dV$

$$\operatorname{div}\mathbb{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+e^{y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z) = 2x+2.$$

Med upprepad integration:

$$\iiint_E \operatorname{div}\mathbb{F}\,dV = \int_0^1\int_0^2\int_0^3 2x+2\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^2 3(2x+2)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 2\cdot 3\cdot(2x+2)\,dx = 12\int_0^1 x+1\,dx = 12\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 = 12\cdot\frac{3}{2} = 18.$$

Svar: 18.

7) Beräkna volymen av området innanför cylindern $x^2+y^2=1$ som ligger mellan planen $z=5-x$ och $z=1$.

Området är $E=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2\leq 1,\ 1\leq z\leq 5-x\}$.

I cylindriska koordinater

$(x,y,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ blir detta:

$0\leq r\leq 1,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi,\quad 1\leq z\leq 5-r\cos\theta.$

Så

$$\text{volym av } E=\iiint_E dV=\left\{\begin{array}{l}\text{integration i}\\ \text{cylindriska koordinater}\\ dV=r\,dz\,d\theta\,dr\end{array}\right\}=$$

$$=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_1^{5-r\cos\theta} r\,dz\,d\theta\,dr=\int_0^1\int_0^{2\pi}\left[rz\right]_{z=1}^{z=5-r\cos\theta}d\theta\,dr=$$

$$=\int_0^1\int_0^{2\pi}4r-r^2\cos\theta\,d\theta\,dr=\int_0^1\left[4r\theta-r^2\sin\theta\right]_0^{2\pi}dr=\int_0^1 8\pi r\,dr$$

$$=\left[4\pi r^2\right]_0^1=4\pi.$$

Svar: 4π.