MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola Datum: 141030 kl. 14.00–18.00

Tentamen Telefonvakt: Tomas Wernstål

772 3557

LMA019

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2014 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Formulera och bevisa projektionssatsen. Rita figur! (4p)

Lösning:

Se föreläsningsanteckningarna!

(b) Antag att punkterna $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 1, 3)$ och $C = (2, 2, 1)$ är givna i ett ON-system. Beräkna projektionen av vektorn $\overrightarrow{AB}$ på vektorn $\overrightarrow{AC}$. (2p)

Lösning:

$\overrightarrow{AB} = \langle 1, 0, 2\rangle$ och $\overrightarrow{AC} = \langle 1, 1, 0\rangle$. Sökt projektionsvektor $\overrightarrow{AD}$ blir då

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\overrightarrow{AC} = \frac{\langle 1, 0, 2\rangle \cdot \langle 1, 1, 0\rangle}{2}\langle 1, 1, 0\rangle = \frac{1}{2}\langle 1, 1, 0\rangle.$$

(c) Beräkna vinkeln mellan vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. (2p)

Lösning:

$\theta = \arccos \dfrac{\langle 1, 0, 2\rangle \cdot \langle 1, 1, 0\rangle}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{10}}.$

(d) Beräkna arean av den triangel som har hörn i punkterna $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 1, 3)$ och $C = (2, 2, 1)$. (2p)

Lösning:

$\langle 1, 0, 2\rangle \times \langle 1, 1, 0\rangle = \langle -2, 2, 1\rangle$. Arean blir då

$$T = \frac{1}{2}|\langle -2, 2, 1\rangle| = \frac{3}{2} \text{ a.e.}$$

3. (a) Definera vad som menas med en minstakvadratlösning till en ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (2p)

Lösning:

Se föreläsningsanteckningarna.

(b) Bestäm minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålles ur

$$A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \hat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{y}.$$

Vi beräknar först A^TA och $A^T\mathbf{y}$.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Vi har då att

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{y} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Bestäm skalären p i matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 9 & p \end{bmatrix}$$

så att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icke-trivial lösning. (3p)

Lösning:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 9 & p & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & p+1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 0 \\ 0 & 8 & p+1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & p+7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ekvationssystemet har icke-trivial lösning om och endast om $p = -7$.

(b) Låt $p = 0$ i matrisen A. Lös med hjälp av Cramers regel x_3 ur ekvationssystemet (3p)

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

$$x_3 = \frac{\det A_3(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 9 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-28}{-28} = 1$$

5. Låt $\mathbf{u}=\langle 1,1,2\rangle$, $\mathbf{v}=\langle -2,1,3\rangle$ och $\mathbf{w}=\langle -1,2,1\rangle$ vara tre vektorer i $\mathbb{R}^3$. Avgör vilken/vilka av följande operationer som är väldefinerade (3p)

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\times\mathbf{w} \qquad (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} \qquad (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}.$$

Beräkna det/de uttryck som är korrekt/korrekta.
Lösning:

Endast uttrycket $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ som är väldefinerat. Vi beräknar först

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2} \rangle \times \langle \mathbf{-2}, \mathbf{1}, \mathbf{3} \rangle = \langle \mathbf{1}, \mathbf{-7}, \mathbf{3} \rangle.$$

Sedan beräknar vi

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \langle \mathbf{1}, \mathbf{-7}, \mathbf{3} \rangle \times \langle \mathbf{-1}, \mathbf{2}, \mathbf{1} \rangle = \langle \mathbf{-13}, \mathbf{-4}, \mathbf{-5} \rangle.$$

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A är en 3×3 matris så är $\det 2A = 2 \det A$ (1p)
Lösning:

Falskt. $\det 2A = 2^3 \det A$.

(b) Om$AB = C$ och C har två kolonner, så måste A också ha två kolonner. (1p)
Lösning:

Falskt. Det är B som måste ha två kolonner.

(c) Om två vektorer är vinkelräta mot varandra så måste deras vektorprodukt vara nollvektorn. (1p)
Lösning:

Falskt. Vektorerna $\langle 1, 0, 0\rangle$ och $\langle 0, 1, 0\rangle$ är vinkelräta mot varandra. Deras vektorprodukt är vektorn $\langle 0, 0, 1\rangle$, som inte är nollvektorn.

(d) Alla ekvationssystem med färre ekvationer än obekanta har parameterlösning. (1p)
Lösning:

Falskt. Ekvationssystemet $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ saknar lösning.

7. För vilka värden på a är vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

linjärt beroende? (4p)
Lösning:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & a & 1-a^2 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & a & 1-a^2 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & a & 1-a^2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & a & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Om $1 - a^2 \neq 0$ får vi trivial lösning $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.
Om $1 - a^2 = 0$ får vi $x_4 = t,\ x_3 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1 = -t$.
Alltså har vi att vektorerna är linjärt beroende om och endast om $a = \pm 1$.

8. Betrakta två avbildningar F och G från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$. Avbildningen F innebär en spegling i $x-$ axeln medan G betyder en vridning $\frac{\pi}{4}$ moturs.

(a) Bestäm matrisen för den sammansatta avbildningen som fås om man först speglar och sedan vrider. (3p)
Lösning:

Avbildningsmatrisen för spegling ges av

$$A = \left[\ T(\mathbf{e_1})\ \mathrm{T}(\mathbf{e_2})\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Avbildningsmatrisen för vridning $\dfrac{\pi}{4}$ moturs ges av

$$B = \left[\ T(\mathbf{e_1})\ \mathrm{T}(\mathbf{e_2})\ \right] = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \sin\frac{3\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Den sammansatta avbildningen som först speglar och sedan vrider blir då

$$BA = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(b) Får man samma resultat(som i uppgift a)) om man först vrider och sedan speglar, d.v.s. är de båda sammansatta avbildningarna kommutativa? (1p)

Lösning:

Den sammansatta avbildningen som först vrider och sedan speglar är

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

och vi ser att avbildningarna ej är kommutativa.

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	LMA019 141030	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm på parameterform, linjen L_1 som går genom punkterna $(1, 3, 2)$ och $(2, 1, 0)$. Ange också en linje L_2 som är parallell med L_1. (3p)

Lösning:

En riktningsvektor $\mathbf{v}=\langle 2-1, 1-3, 0-2\rangle = \langle 1, -2, -2\rangle$, vilket ger

$x = 1 + t, \qquad y = 3 - 2t, \qquad z = 2 - 2t.$

Svar: $x = 1 + t, \qquad y = 3 - 2t, \qquad z = 2 - 2t.$

(b) Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

$$[A\ I] = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 4 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/4 & 2/4 & 1/4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -13/4 & 6/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -5/4 & 2/4 & 1/4 \end{array}\right] =$$

$[I\ A^{-1}]$

Svar: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -1 \\ -13/4 & 6/4 & 1/4 \\ -5/4 & 2/4 & 1/4 \end{bmatrix}$.

(c) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$. Lös matrisekvationen $AX - B = X$. (3p)

Lösning:

$$AX - B = X \Leftrightarrow AX - X = B \Leftrightarrow (A - I)X = B \Leftrightarrow X = (A - I)^{-1}B$$

om $(A - I)^{-1}$ existerar.

$$X = (A–I)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 10 & -7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Svar: ....

(d) Ett plan innehåller den räta linjen $(x, y, z) = (2 + 5t, 1 + 2t, 1 + t)$ och punkten $(3, -1 - 2)$. Bestäm en ekvation för planet. (4p)

Lösning:

$A = (2, 1, 1)$ och $B = (3 - 1, -2)$ är två punkter i planet $\Rightarrow$ $\mathbf{v_1}=\langle 1, -2, -3\rangle$. Även vektorn $\mathbf{v_2}=\langle 5, 2, 1\rangle$ (riktningsvektor till linjen)ligger i planet. Vi tar nu och beräknar vektorprodukten av $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ och får då
$\mathbf{v_2} \times \mathbf{v_1}=\langle 5, 2, 1\rangle \times \langle 1, -2, -3\rangle = -4\langle 1, -4, -3\rangle$. Vi väljer $\mathbf{n}=\langle 1, -4, -3\rangle$. Insättning i planets ekvation ger att $x - 4y + 3z + 1 = 0$.

Svar: $x - 4y + 3z + 1 = 0$.

(e) Är linjen $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z-3}{3}$ vinkelrät mot planet du fick fram i uppgift d). (1p)

Lösning:

Vi avläser att $\mathbf{v}=\langle 1, -4, 3\rangle = \mathbf{n}$. Alltså är linjen vinkelrät mot planet.

Svar: JA!