MATEMATIK — **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola — Datum: 140926 kl. 08.30–12.30

Tentamen — Telefonvakt: Jonny Lindströml

0703 088 304

LMA019

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2014 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)

2. (a) Bevisa projektionssatsen i det fall då vektorn **a** och vektorn **b** bildar spetsig vinkel med varandra. (3p)

(b) Antag att punkterna $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 4, 5)$ och $C = (2, 2, 4)$ är givna i ett ONH-system. Beräkna projektionen av vektorn $\overrightarrow{AB}$ på vektorn $\overrightarrow{AC}$. (2p)

3. (a) Förklara vad som menas med begreppet *linjärt oberoende mängd av vektorer* i $\mathbb{R}^n$. (2p)

(b) Bestäm värdet på konstanten a så att

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

blir linjärt oberoende. (3p)

4. Låt ES vara ekvationssystemet
$$\begin{cases} 2x + ay + z = a^2 + 1 \\ 3x - 2y + z = 3 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}.$$

(a) Beräkna $\det\mathbf{A}$ där $\mathbf{A}$ är koefficientmatrisen till ES, och avgör, med hjälp av resultatet, för vilka värden på konstanten a som $\mathbf{A}$ är inverterbar. (2p)

(b) Beräkna x med Cramers regel, för de värden på a för vilka detta är möjligt. (2p)

(c) Lös med eliminationsmetoden på matrisform, ES för $a = -1$. (2p)

5. Anpassa med minsta kvadratmetoden en rät linje $y = a + b \cdot t$ till följande mätdata

t	-2	-1	0	1
y	-2	1	0	3

Rita en beskrivande figur! Beräkna också medelfelet. (6p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.
(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Ett linjärt ekvationssystem som har fler obekanta än ekvationer måste ha mer än en lösning. (1p)

(b) Triangeln med hörn i punkterna $(1, 2, 0), (2, 3, 1)$ och $(2, 0, -2)$ har en vinkel som är större än $90°$. (1p)

(c) Om $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är $n \times n$ matriser och $\det\mathbf{A} = 2$ och $\det\mathbf{B} = 3$ så är $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 5$. (1p)

(d) För vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^3$ så är alltid $\| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \|^2 + \| \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \|^2 = \| \mathbf{u} \|^2 \| \mathbf{v} \|^2$. (1p)

7. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avbildar de tre vektorerna (4p)

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0),\ \mathbf{v} = (1, 1, 0),\ \mathbf{w} = (2, 1, 1)$$

på vektorerna

$$F(\mathbf{u}) = (2, 3, 4),\ F(\mathbf{v}) = (4, -3, 2),\ F(\mathbf{w}) = (8, 1, 5).$$

Bestäm avbildningsmatrisen.

8. En ljusstråle utgår från punkten $A = (1, 2, 1)$ i en riktning som ges av vektorn $\mathbf{v} = (1, 0, 2)$ och träffar en spegel belägen i planet $x + y - z - 1 = 0$.

(a) I vilken punkt träffar ljusstrålen planet? (1p)

(b) Bestäm en ekvation för den reflekterade ljusstrålen. (3p)

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	LMA019 140926	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm inversen till matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & 8 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$. Lös matrisekvationen $\mathbf{BX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Bestäm på parameterform, linjen L som går genom punkterna $(4, -1, 0)$ och $(2, 0, 2)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm alla värden på konstanten a så att vektorn $\mathbf{u} = \langle 2, 1, 1 \rangle$ blir ortogonal mot vektorn $\mathbf{v} = \langle a, 1+a, 1-a \rangle$. Beräkna sedan längden av vektor $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ för det erhållna värdet på konstanten a. (4p)

Lösning:

Svar: ....