7.

a)
$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -12$$

---

b)
$$[A\ I] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [I\ \ A^{-1}]$$

$$\therefore\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1/2 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $BX + IX = A^T \iff (B+I)X = A^T$

$$B+I = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(B+I) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4 = -5 \neq 0$$

$\Rightarrow (B+I)^{-1}$ existerar

Vi får då:

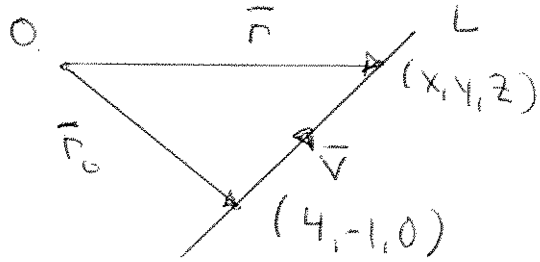
$$X = (B+I)^{-1}A^T = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

---

d) En riktningsvektor

$\bar{v} = \langle 2-4, 0-(-1), 2-0 \rangle = \langle -2, 1, 2 \rangle$



Linjens ekvation

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{v} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

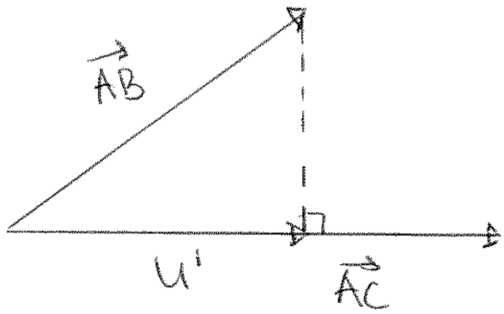
---

e) $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \Rightarrow \langle 2,1,1 \rangle \cdot \langle a, 1+a, 1-a \rangle = 2a + 1 + a + 1 - a$

$= 2a + 2 = 0$, alltså $\underline{\underline{a = -1}}$

Längden: $|\bar{u} + 2\bar{v}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

2 b)



$\vec{AB} = \langle 2-1, 4-2, 5-3 \rangle =$

$= \langle 1, 2, 2 \rangle$

$\vec{AC} = \langle 2-1, 2-2, 4-3 \rangle = \langle 1, 0, 1 \rangle$

Ortogonala projektionen u' av vektorn $\vec{AB}$ på vektorn $\vec{AC}$ ges av

$$u' = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AC}|^2} \vec{AC} = \frac{\langle 1,2,2 \rangle \cdot \langle 1,0,1 \rangle}{2} \langle 1, 0, 1 \rangle =$$

$$= \frac{3}{2} \langle 1, 0, 1 \rangle .$$

---

3 b) [redacted] matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 1-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 5a-7 \end{bmatrix}$$

De tre vektorerna är linjärt beroende om och endast om $5a - 7 = 0$

$\Rightarrow a = 7/5$

4.

a) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{=-5} - a\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{=5} + 1\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=5} =$

$= -10 - 5a + 5 = -5(a+1)$

A^{-1} existerar $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$

---

b) $\det A_1 = \begin{vmatrix} a^2+1 & a & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (a^2+1)\cdot(-5) - a\cdot 5 + 1\cdot 5 =$

$= -5a^2 - 5 - 5a + 5 = -5a(a+1)$

$\Rightarrow x = \dfrac{\det A_1}{\det A} = \dfrac{-5a(a+1)}{-5(a+1)} = a$ för $a \neq -1$.

---

c) $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{\underline{1}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

x och y bundna variabler, z fri variabel

$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$

5. Insättning av punkternas koordinater ger oss ES

$$\begin{cases} a - 2b = -2 \\ a - b = 1 \\ a + 0b = 0 \\ a + b = 3 \end{cases} \quad \text{. På matrisform} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Bästa lösning i minsta kvadratmetodens mening erhålles ur

$$A^T A \hat{\bar{x}} = A^T \bar{y} \iff \hat{\bar{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{y} \quad \left(\text{om } (A^T A)^{-1} \text{ existerar} \right)$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

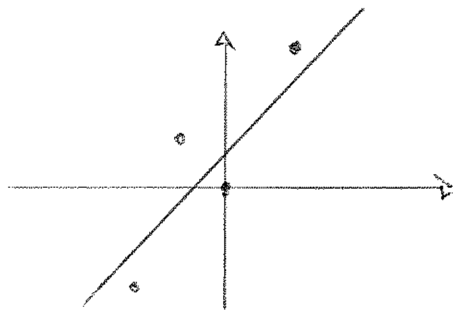
$$\Rightarrow \hat{\bar{x}} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} : \quad \underline{\underline{y = \frac{6}{5} + \frac{7}{5} t}}$$

<u>Felvektorn:</u> $\bar{f} = A\hat{\bar{x}} - \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6/5 \\ 7/5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

<u>Varför medelfelet blir</u>

$$\eta = \frac{|\bar{f}|}{\sqrt{m}} = \frac{2}{5\sqrt{4}} \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-3)^2 + (-1)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$$



6.

(a) falskt, ty ES $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ saknar lösning

(b) Sant, bilda vektorerna $u = \langle 2-1, 3-2, 1-0 \rangle = \langle 1,1,1 \rangle$

och $\bar{v} = \langle 2-1, 0-2, 2-0 \rangle = \langle 1,-2,-2 \rangle$

$\Rightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} = \langle 1,1,1 \rangle \cdot \langle 1,-2,-2 \rangle = -3 < 0$, vilket

innebär att $\cos\theta < 0 \Rightarrow 90^\circ < \theta < 180^\circ$.

(c) falskt, visas med ett motexempel

(d) Sant,

$$|\bar{u} \times \bar{v}|^2 + |\bar{u} \cdot \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 |\bar{v}|^2 \sin^2\theta + |\bar{u}|^2 |\bar{v}|^2 \cos^2\theta =$$

$$= |\bar{u}|^2 |\bar{v}|^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta) = |\bar{u}|^2 |\bar{v}|^2.$$

---

7. Låt A beteckna avbildningsmatrisen för F,

$$A = \begin{bmatrix} F(\bar{e}_1) & F(\bar{e}_2) & F(\bar{e}_3) \end{bmatrix}$$

$$F(\bar{e}_1) = F(\bar{u}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$F(\bar{v}) = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \overbrace{F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)}^{F(\bar{e}_1)} + \overbrace{F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)}^{F(\bar{e}_2)}$$

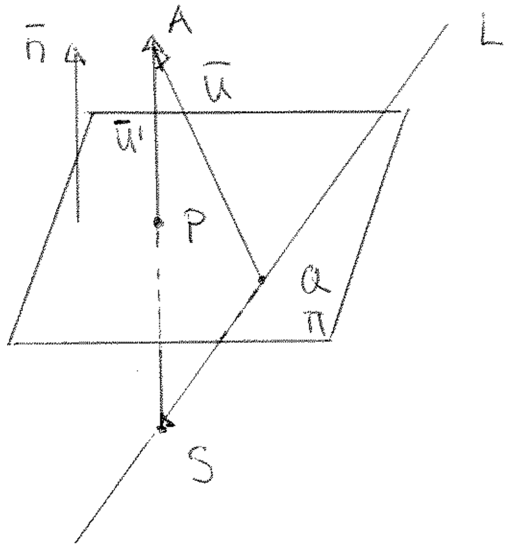
$$\Rightarrow F(\bar{e}_2) = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$F(\bar{w}) = F\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow F(\bar{e}_3) = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

8. Vi inför beteckningar enligt figur!



Vi söker först skärningspunkten Q mellan linjen L och planet π.

Vi har på linjen som går genom A och Q en punkt $A = (1,2,1)$ och riktningsvektor $\bar{v} = \langle 1, 0, 2 \rangle$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ Insättning av (x,y,z) i π ger $t = 1 \Rightarrow Q = \underline{\underline{(2,2,3)}}$

Nu har vi en punkt på L och återstår då att finna en riktningsvektor $\bar{v}$ till L.

$\bar{u} = \overrightarrow{QA} = \langle 1-2, 2-2, 1-3 \rangle = \langle -1, 0, -2 \rangle.$

Ortogonala projektionen u' av vektorn $\bar{u}$ på vektorn $\bar{n}$ ges av

$$\bar{u}' = \frac{\bar{u} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2}\bar{n} = \frac{\langle -1, 0, -2 \rangle \cdot \langle 1, 1, -1 \rangle}{3}\langle 1, 1, -1 \rangle = \frac{1}{3}\langle 1, 1, -1 \rangle$$

Vi vet att sökt linje L går genom spegelpunkten S och $\overrightarrow{QS}$ är en riktningsvektor till L

$$\Rightarrow \overrightarrow{QS} = \bar{u} - 2\bar{u}' = \langle -1, 0, -2 \rangle - \frac{2}{3}\langle 1, 1, -1 \rangle = -\frac{1}{3}\langle 5, 2, 4 \rangle$$

Vi väljer riktningsvektor $\bar{v} = \langle 5, 2, 4 \rangle$

$\Rightarrow \quad x = 2 + 5t \quad y = 2 + 2t \quad z = 3 + 4t$