1.

a) $(2A+X)B^{-1} = I \iff (2A+X)B^{-1}B = IB$

$\iff 2A+X = IB \iff X = IB - 2A$

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

---

b) Jacobis metod

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{-2R_1+R_2 \to R_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{-R_2+R_3 \to R_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$

$\overset{2R_3+R_4 \to R_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 4 = -8$

---

d) Vi kan direkt skriva upp avbildningsmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

---

e) Planets ekvation: $ax + by + cz + d = 0$

$\vec{AB} = \langle -1-1, 3-(-1), 2-0 \rangle = \langle -2, 4, 2 \rangle$

$\vec{AC} = \langle 2-1, 5-(-1), 1-0 \rangle = \langle 1, 6, 1 \rangle$

en normalvektor till planet

$$\bar{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -8\bar{i} + 4\bar{j} - 16\bar{k} = \langle -8, 4, -16 \rangle = -4\langle 2, -1, 4 \rangle$$

Vi väljer $\bar{n} = \langle 2, -1, 4 \rangle$

$\Rightarrow 2x - y + 4z + d = 0$

Insättning av en punkt i planet exempelvis $A = (1, -1, 0)$ ger

$2 \cdot 1 + 1 + 0 + d = 0$

$\Leftrightarrow$

$d = -3$

$\Rightarrow \underline{\underline{2x - y + 4z - 3 = 0}}$

2. b)

$$\cos\theta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} = \frac{\langle 1,0,2\rangle\cdot\langle 2,1,2\rangle}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{9}} = \frac{2+0+4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{9}} =$$

$$= \left(\frac{6}{\sqrt{45}}\right) = \frac{6}{\sqrt{5}\cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

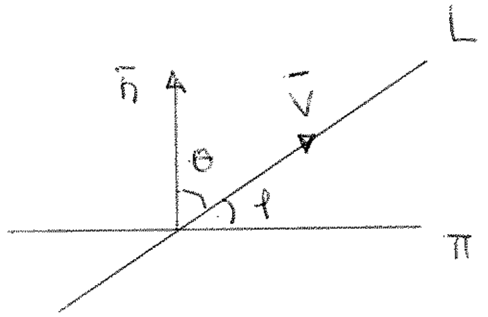
$$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

---

3. b) L på parameterform $\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + 7t \end{cases}$

Vinkeln mellan normalvektorn $\bar{n}$ och riktningsvektorn $\bar{v}$ är θ.

Vi söker vinkeln $\varphi = 90° - \theta$.



<u>Vi har att</u>

$\bar{n} = \langle 2,2,-1\rangle$ och $\bar{v} = \langle 4,4,7\rangle$

<u>Sats:</u>

$$\pm\bar{n}\cdot\bar{v} = |\bar{n}||\bar{v}|\cos\theta$$
$$= |\bar{n}||\bar{v}|\cos(90° - \varphi)$$
$$= |\bar{n}||\bar{v}|\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{\pm\bar{n}\cdot\bar{v}}{|\bar{n}||\bar{v}|} = \pm\frac{8+8-7}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{81}} = (\pm)\frac{9}{3\cdot 9} = \frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{\varphi = \arcsin\frac{1}{3}}}$$

4. $$\begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 2a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 2a-1 \end{bmatrix}$$

Från detta ser vi att $\bar{w} \in \text{Span}\{\bar{u}\ \bar{v}\}$ om och endast om $2a-1=0$ d.v.s. $\underline{\underline{a=1/2}}$

För $a=1/2$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = -1, \quad x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_2 = 1 - \frac{1}{2}(-1) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\bar{u} + (-1)\bar{v} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{w}$$

5. $\begin{cases} x+2y=2 \\ x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ har matrisformen $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\bar{b}}$

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålls ur

$$A^T A \hat{\bar{x}} = A^T \bar{b} \quad \Rightarrow \quad \hat{\bar{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{b}$$

Vi beräknar $A^T A$ och $A^T \bar{b}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 6 - 4 \cdot 4} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\bar{x}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \text{ så att } \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

och felvektorn

$$\bar{f} = A\hat{\bar{x}} - \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

Varför medelfelet blir

$$\eta = \frac{\|\bar{f}\|}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{0^2 + (1/2)^2 + (-1/2)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{4}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$(\approx 0{,}41)$

6. Arean(bild) = | det A| · Arean(start)

$$\left(T(s) = |\det A| \cdot s \right)$$

$$\text{Area(bild)} = \left| \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right| = |-14| = 14$$

$$\text{Area(start)} = 7$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a - 2$$

$$\Rightarrow |\det A| = |a-2|$$

<u>Vi har då</u>

$$14 = |a-2| \cdot 7$$

$$\Leftrightarrow$$

$$|a-2| = 2$$

<u>Fall I.</u>

$$-(a-2) = 2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{a = 0}}$$

<u>Fall II</u>

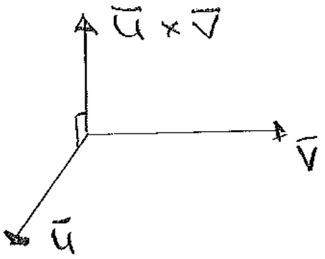
$$a-2 = +2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{a = 4}}$$

7. a) Sant.

Kryssprodukten är ju ortogonal mot de ingående vektorerna.



$\bar{u}\cdot(\bar{u}\times\bar{v}) = 0$

---

b) Sant.

B är $(m\times n)$ då är B^T $(n\times m)$

A är $(m\times n)$ då är A^T $(n\times m)$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB^T \text{ är } (m\times n)(n\times m) = (m\times m) & \text{definerad} \\ A^TB \text{ är } (n\times m)(m\times n) = (n\times n) & \text{definerad} \end{cases}$$

---

c) Falskt. Motexempel. Tag $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-4 = -1$, $\det B = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-3 = -1$

$\Rightarrow \det A + \det B = -1 - 1 = -2$

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A+B) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12-15 = -3$

<u>Alltså:</u> $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

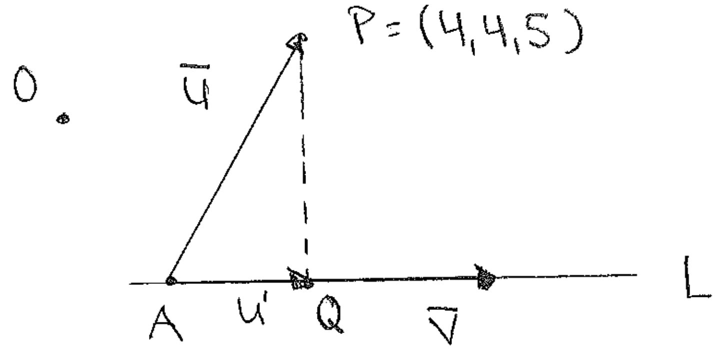
---

d) Falskt

$VL = (A+B)(A-B) = A\cdot A - AB + BA - B\cdot B$

Vilket är lika med HL om och endast om $BA = AB$, vilket inte är sant (bara om A och B kommuterar).

8.



Tag en punkt $A \in L$

t.ex. $A = (2,3,4)$

$$\Rightarrow \bar{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en riktningsvektor $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\bar{u}'$ är ortogonala projektionen av vektorn $\bar{u}$ på vektorn $\bar{v}$. Projektionsformeln ger

$$\bar{u}' = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{v}\|^2} \bar{v} = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}{\sqrt{9}^{\,2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{6}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

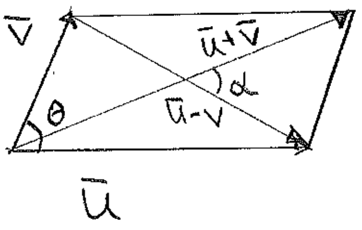
Vektoraddition ger

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + u' = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 13/3 \\ 16/3 \end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> Projektionspunkten $Q = \frac{1}{3}(8,13,16)$

9. $\|\bar{u}\| = 4$

α sökes!



Parallellogramens omkrets

$P = 2\|\bar{u}\| + 2\|\bar{v}\| = 12$

$\Leftrightarrow \|\bar{v}\| = 2$

Vi antar att vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är θ

Vi vet att parallellogramens area är $6\,cm^2$.

$\Rightarrow T = \|\bar{u} \times \bar{v}\| = \underbrace{\|\bar{u}\|}_{=4}\underbrace{\|\bar{v}\|}_{=2} \sin\theta = 6$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Med figurens beteckningar blir diagonalerna $\bar{u}+\bar{v}$ och $\bar{u}-\bar{v}$ och vi får att

$\pm(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = \|\bar{u}+\bar{v}\|\|\bar{u}-\bar{v}\|\cos\alpha$

$\Rightarrow \alpha = \arccos \pm\frac{(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v})}{\|\bar{u}+\bar{v}\|\,\|\bar{u}-\bar{v}\|}$

Vi behöver veta $(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v})$, $\|\bar{u}+\bar{v}\|$ och $\|\bar{u}-\bar{v}\|$

$(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = \|\bar{u}\|^2 \underbrace{-\bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\bar{u}}_{=0} - \|\bar{v}\|^2 = 16 - 4 = 12$

$\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 = (\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}+\bar{v}) = \|\bar{u}\|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + \|\bar{v}\|^2$

$= \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 + 2\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|\cos\theta =$

$= 16 + 4 + 2\cdot4\cdot2\cos\theta =$

$= 20 + 16\cos\theta$

$= 4(5 + 4\cos\theta)$

9. $\|\bar{u}-\bar{v}\|^2 = (\bar{u}-\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = \|\bar{u}\|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + \|\bar{v}\|^2$

$= \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 - 2\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|\cos\theta$

$= 4(5 - 4\cos\theta)$

Vi har då att

$\|\bar{u}+\bar{v}\|\,\|\bar{u}-\bar{v}\| = \sqrt{4(5+4\cos\theta)4(5-\cos\theta)} =$

$= 4\sqrt{25-16\cos^2\theta} = 4\sqrt{25-16(1-\sin^2\theta)} =$

$= \left\{ \text{Vet sedan tidigare att } \sin\theta = \frac{3}{4} \right\} =$

$= 4\sqrt{25-16(1-\frac{9}{16})} = 4\sqrt{25-16+9} = 4\sqrt{18} = \underline{\underline{12\sqrt{2}}}$

Nu kan vi beräkna α

$\alpha = \arccos \frac{12}{12\sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$