1.

a) $\bar{n}_1 = \langle 5, 9, -3 \rangle$; $\bar{n}_2 = \langle 3, -1, 2 \rangle$

$$\cos\theta = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} = \frac{\langle 5,9,-3\rangle \cdot \langle 3,-1,2\rangle}{\sqrt{115} \cdot \sqrt{14}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

---

b) $\bar{u} \parallel \bar{v}$, har vi en skalär k så att

$\bar{u} = k\bar{v}$ d.v.s.

$$\Rightarrow \langle a+2, 2a \rangle = k\langle 1, a-1 \rangle$$

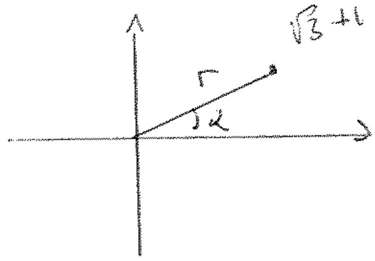
$$\begin{cases} a+2 = k \\ 2a = k(a-1) \end{cases} \Leftrightarrow 2a = (a+2)(a-1) = a^2 + a - 2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = -1}} \vee \underline{\underline{a = 2}}.$$

---

c) $\alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$



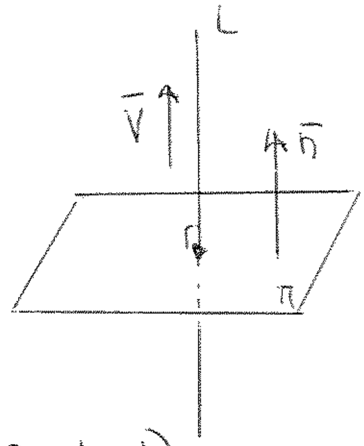
$$\Rightarrow \sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}+i)^7 = \left(2e^{i\pi/6}\right)^7 = 2^7 e^{i7\pi/6} =$$

$$= 128\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 128\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$= \underline{\underline{-64\sqrt{3} - 64i}}$$

d) en normalvektor till planet är $\bar{n} = \langle 1, 2, 1 \rangle$, vilket också är en riktningsvektor till linjen



$\Rightarrow \quad x = 1+t, \quad y = 1+2t, \quad z = t$

Insättning i π ger $t = -1 \Rightarrow (x,y,z) = (0,-1,-1)$

e) $\bar{u}$ är en linjärkombination av $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ om och endast om

$$\bar{u} = x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2$$

är en lösbar vektorekvation. Totalmatrisen för vektorekvationen blir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & h-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & h-5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{h = 5}} \quad (x_2 = -3 \;;\; x_1 = 5)$

$$\Rightarrow 5\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{v}_1} - 3\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{v}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\bar{u}}$$

2 b) $BX - C = BXA \Leftrightarrow BX - BXA = C$

$\Leftrightarrow BXI - BXA = C \Leftrightarrow BX(I-A) = C$

$\Leftrightarrow B^{-1}BX(I-A) = B^{-1}C$; B^{-1} måste existera

$\Leftrightarrow X(I-A) = B^{-1}C$

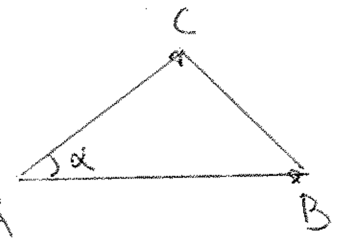
$\Leftrightarrow X(I-A)(I-A)^{-1} = B^{-1}C(I-A)^{-1}$; $(I-A)^{-1}$ måste existera

$\Leftrightarrow X = \underline{B^{-1}C(I-A)^{-1}}$

---

3 b) $\vec{AB} = \langle -2-2, 1+2, 4+1 \rangle = \langle -4, 3, 5 \rangle$

$\vec{AC} = \langle 4-2, -1+2, -3+1 \rangle = \langle 2, 1, -2 \rangle$



$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}|\,|\vec{AC}|} = \frac{\langle -4,3,5 \rangle \cdot \langle 2,1,-2 \rangle}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{9}} = \frac{-8+3-10}{5\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{-15}{15\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

4. a)

$$M = \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a-2 & -3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 & -4 \end{bmatrix} \overset{a \neq 2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{a-2} \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4a-4}{a-2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{a-2} \end{bmatrix}$$

Fall I. $a \neq 2$

(Precis en lösning)

$$\begin{cases} x = \dfrac{4a-2}{a-2} \\ y = -1 \\ z = -\dfrac{4}{a-2} \end{cases}$$

Fall II $a = 2$

(Es saknar lösning)

$$M \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

---

b) $$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-2 \end{vmatrix} = a - 2$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix} = \ldots = 2 - a$$

$$\Rightarrow y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{2-a}{a-2} = \frac{-(a-2)}{a-2} = -1 \quad ; \; a \neq 2$$

4.c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$$A^Tb = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$A^TAX = A^Tb$$

Vi vet att $\det(A^TA) \neq 0 \Leftrightarrow (A^TA)^{-1}$ existerar och har den entydiga lösningen $X = (A^TA)^{-1}(A^Tb)$

Om $\det(A^TA) = 0$ har ES oändligt många lösningar

$\Rightarrow$

$$M = \left[A^TA \mid A^Tb\right] = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 11 \\ 5 & 6 & 5 & 10 \\ 6 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{16}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Varav $\begin{cases} x + z = \frac{16}{11} \\ y = \frac{5}{11} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{11} - t \\ y = \frac{5}{11} \\ z = t \end{cases}$

$$f = AX - b = \begin{bmatrix} x + y + z - 3 \\ x + 2y + z - 2 \\ 2x + y + 2z - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{11} - t + \frac{5}{11} + t - \frac{33}{11} \\ \frac{16}{11} - t + \frac{10}{11} + t - \frac{22}{11} \\ \frac{32}{11} - 2t + \frac{5}{11} + 2t - \frac{33}{11} \end{bmatrix} = \frac{4}{11}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Varför medelfelet blir

$$\eta = \frac{|f|}{\sqrt{m}} = \frac{4}{11} \cdot \frac{\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{11}}{11\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{33}} \approx 0{,}7$$

5. a) Falskt, x-axeln och y-axeln är vinkelräta mot z-axeln, men x-axeln är vinkelrät mot y-axeln.

b) Falskt, kan vara skeva.

c) Sant, om vi antar att $\bar{u} \neq 0$ och $\bar{v} \neq 0$ och vinkeln mellan vektorerna är α så har vi

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\alpha = 0$$

och

$$|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}|\sin\alpha = 0$$

vilket ger att

$$\cos\alpha = \sin\alpha = 0$$

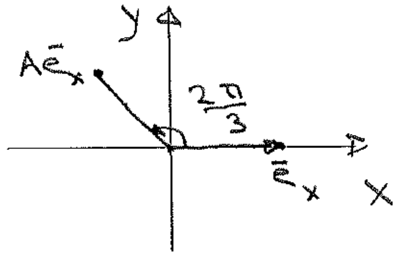
men sådana α finns inte

Alltså: Någon av vektorerna är nollvektorn.

6. Vridning $\frac{2\pi}{3}$ moturs innebär att

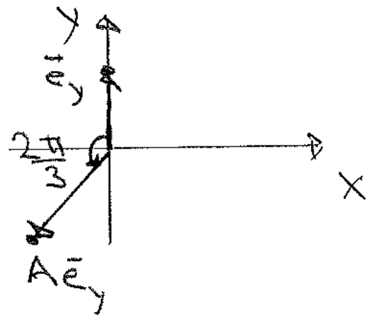
a) basvektorerna $\bar{e}_x$ och $\bar{e}_y$ vrides till

$$A\bar{e}_x = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$



och

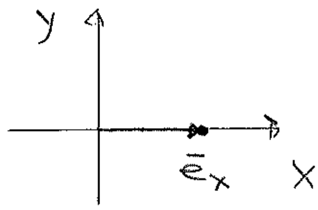
$$A\bar{e}_y = \begin{bmatrix} \cos\frac{7\pi}{6} \\ \sin\frac{7\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \cos\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



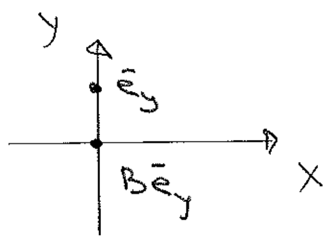
Avbildningen F får matrisen $A = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$

Ortogonala projektionen av $\bar{e}_x$ och $\bar{e}_y$ på x-axeln ger

$$B\bar{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ och}$$



$$B\bar{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



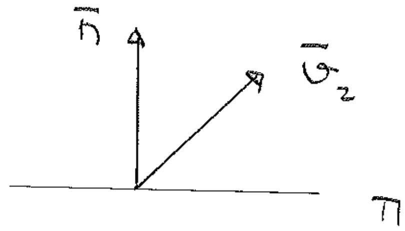
b) Den sammansatta avbildningen som först projicerar och sedan vrider ges av matrisen

$$A \cdot B = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

7. L_1 sökes! $P_1 = (1,0,2)$

<u>Givet:</u> $L_1 \perp L_2$

men L_2 är <u>inte</u> vinkelrät mot planet π ty



$\bar{v}_2 = \langle -1, 1, 2 \rangle$ och $\bar{n} = \langle 1, 1, 1 \rangle$

Om vi tar $\bar{v}_2 \times \bar{n}$ får vi en vektor som är vinkelrät mot $\bar{n}$ och $\bar{v}_2$ och parallell med planet π. Denna vektor $\bar{v}_1$ är riktningsvektor till L_1.

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2 \times \bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \langle -1, 3, -2 \rangle$$

<u>Linjens ekvation</u>

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$