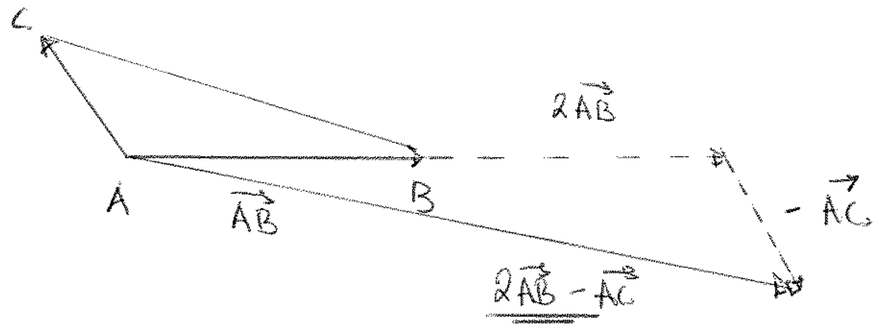
1 a)



---

b)

$$[A \; I] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix} = [I \; A^{-1}]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1/2 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $BX + X = A^T \iff BX + IX = A^T \iff (B+I)X = A^T$

$$\iff X = (B+I)^{-1}A^T = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} =$$

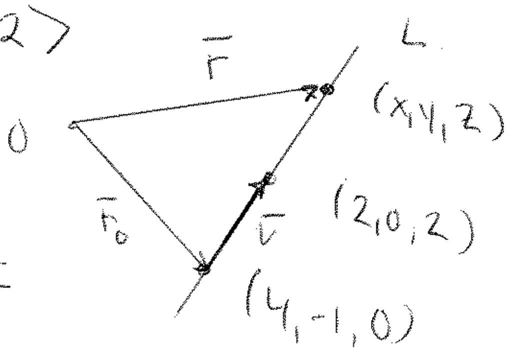
$$= -\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}9 & 12 & 15\\ -2 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

---

d) $\bar{v} = \langle 2-4, 0+1, 2-0\rangle = \langle -2, 1, 2\rangle$

$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{v}$

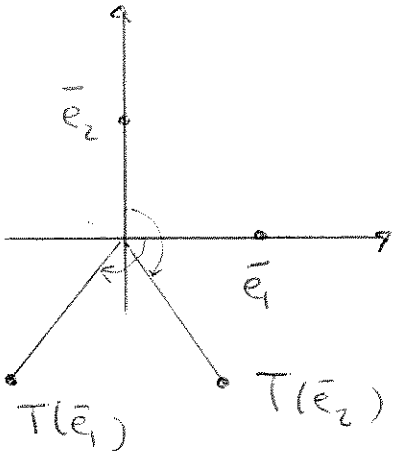
$x = 4 - 2t, \quad y = -1 + t, \quad z = 0 + 2t$



---

e)

$$T(\bar{e}_1) = \begin{bmatrix}\cos\frac{5\pi}{4}\\ \sin\frac{5\pi}{4}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$



$$T(\bar{e}_2) = \begin{bmatrix}\cos\frac{7\pi}{4}\\ \sin\frac{7\pi}{4}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$A = \left[T(\bar{e}_1)\ T(\bar{e}_2)\right] = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

2.b) $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 + x_4\bar{v}_4 = 0$

$x_1, \ldots, x_4$ ej alla lika med 0, linjärt beroende

Totalmatris

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_4 fri $\Rightarrow x_4 = t \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -t \Rightarrow x_1 = -t$

<u>linjärt beroende</u> (tag t.ex. $t = 2$ ...)

3.b) $$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & x & 4 \\ 2 & 2 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & x+6 & x+8 \\ 5 & 6 & 2x+2 \\ 3 & x+2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & x & 4 \\ 2 & 2 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 \\ x+8 & 6 & 2x+2 \\ x+6 & x+2 & 6 \end{bmatrix}$$

$AB = BA$ ger

$x + 6 = 3 \land x + 8 = 5$

$\Leftrightarrow$

$\underline{\underline{x = -3}}$

4. Totalmatris

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & a & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & a+4 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & a+5 & 5 \end{bmatrix}$$

Systemet saknar lösning om den sista trappstegs-matrisen har ett pivotelement i högerledskolonnen. Detta inträffar endast om $a = -5$.

---

5. $y = kx + m \Rightarrow \underset{A}{\begin{bmatrix} -1 & +1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\bar{x}}{\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}} = \underset{\bar{y}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}$

MKV-metoden: $A^T A \hat{x} = A^T \bar{y}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^T A)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T \bar{y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{y} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{m} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{y = -\frac{3}{2} x + 1}$$

6. Eftersom planet innehåller linjen vet vi att $\bar{v} = \langle 2,4,5 \rangle$ och $A = (2,1,4)$ tillhör planet. Vidare har vi givet att $B = (0,-1,1)$ ligger i planet.

$\Rightarrow \bar{u} = \langle 2-0, 1+1, 4-1 \rangle = \langle 2,2,3 \rangle$ är en vektor i planet

$$\Rightarrow \bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \dots = -2 \langle 1,2,-2 \rangle .$$

Välj $\bar{n} = \langle 1,2,-2 \rangle$

Insättning i planets ekvation ger

$$\bar{n} \cdot \langle \bar{r} - \bar{r}_0 \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\langle 1,2,-2 \rangle \cdot \langle x-0, y+1, z-1 \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x + 2y - 2z + 4 = 0$$

7. a) falskt, Visas med ett motexempel

b) falskt

(ES)

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

har entydiga lösningen $x = y = 1$

c) Sant

$\bar{v} = \langle 1, -3, 2 \rangle$

$\bar{n} = \langle 2, -6, 4 \rangle = 2\langle 1, -3, 2 \rangle$

$= 2\bar{v}$

$\bar{n} \parallel \bar{v}$.

d) $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \Rightarrow$ Vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är rät.

$(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = |\bar{u} \times \bar{v}|^2 = (|\bar{u}||\bar{v}| \sin\theta)^2$

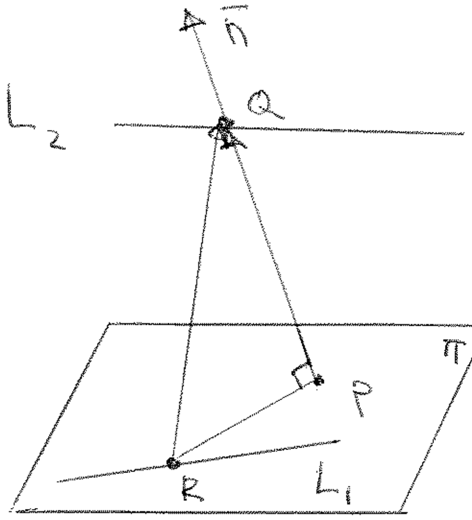
$= \{\theta = \frac{\pi}{2}\} = |\bar{u}|^2 |\bar{v}|^2 = HL$

Sant

8. Vi lägger L_1 i ett plan π.

L_2 är parallell med π.

Vi beräknar avståndet mellan L_2 och π



Enligt figur har vi att

$Q \in L_2$, $R \in \pi$ (men ligger på L_1) och $P \in \pi$

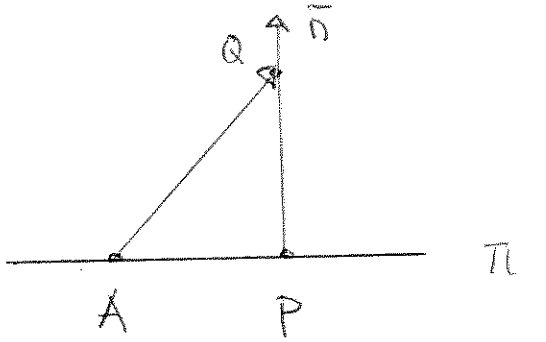
$|\overrightarrow{PQ}|$ sökes!

En normalvektor till planet

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \ldots = \langle -1, -7, -2 \rangle$$

$$\left(\begin{array}{l} \bar{v}_1 = \langle 1, -1, 3 \rangle \\ \bar{v}_2 = \langle -1, -1, 4 \rangle \end{array} \right)$$

Tag en godtycklig punkt i π (tas en på L_1)



$A = (3, 1, 3) \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \langle -2, -3, -2 \rangle$

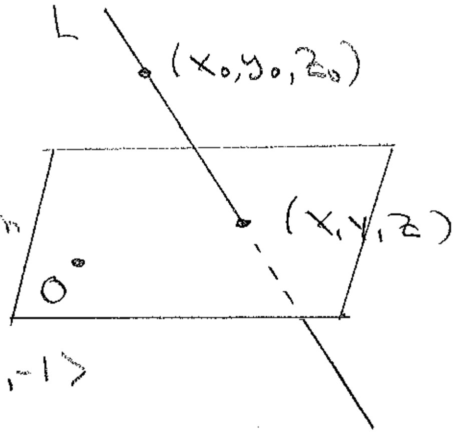
Vektorn $\overrightarrow{PQ}$ är ortogonala projektionen av vektorn $\overrightarrow{AQ}$ på $\bar{n}$.

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{AQ} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2} \bar{n} = \frac{\langle -2, -3, -2 \rangle \cdot \langle -1, -7, -2 \rangle}{54} \langle -1, -7, -2 \rangle$$

$$= \frac{27}{54} \langle -1, -7, -2 \rangle = \frac{1}{2} \langle -1, -7, -2 \rangle$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 7^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{54} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

9. Bestäm matrisen för den linjära avbildning som svarar mot projektionen på planet $x+y+z=0$ i riktning $(1,1,-1)$.



Lsg/ Tag en punkt (x_0, y_0, z_0) på en linje med riktningsvektorn $\bar{v}$.

Eftersom $\bar{n} = \langle 1,1,1 \rangle$ och $\bar{v} = \langle 1,1,-1 \rangle$ är det ej ortogonal projektion

Bilden av punkten (x_0, y_0, z_0) bestäms genom att vi ser efter var linjen

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + t \\ z = z_0 - t \end{cases}$$ skär planet

$\Rightarrow$ $x_0 + t + y_0 + t + z_0 - t = 0$ ger $t = -(x_0 + y_0 + z_0)$

Bilden av punkten blir därför

$$\begin{cases} x = x_0 - (x_0 + y_0 + z_0) = -y_0 - z_0 \\ y = y_0 - (x_0 + y_0 + z_0) = -x_0 - z_0 \\ z = z_0 + (x_0 + y_0 + z_0) = x_0 + y_0 + 2z_0 \end{cases} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}}_{\bar{x}}$$

Vilket svarar mot avbildningsmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$