**LMA019, Algebra**

**Svar eller kortfattade lösningar till tentamen 29:e oktober 2015**

1.

a. $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

b. $M^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

c. $-2i$

d. $\cos v = -\frac{2}{3\sqrt{21}}$

2. Svaret är ja om systemet med totalmatrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ har minst en lösning.

Genom att reducera ser man att *A* är radekvivalent med $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alltså ja.

3.

a. Två vektorer i planet: *v* = (2,-5,0) och *u* = (1,-1,1). Så en normalvektor är $u \times v = (5,2,-3)$
Man får planets ekvation till $5x + 2y - 3z = 2$

b. Linjen skär inte planet om ekvationen $5(1+2t) + 2(3-2t) - 3(2+bt) = 2$ ***saknar*** lösning.
Förenkling ger $3 + (6-3b)t = 0$ så $b = 2$

4. Två sidor i triangeln: (1,5,0) och (6,3,0). Kryssprodukten blir = (0,0,-27) och triangelns area blir $= \frac{27}{2}$

5. Systemet som skall lösas är $\begin{cases} 3-t & = & 2+s \\ 2t & = & 2-2s \\ 3t-3 & = & 4+s \end{cases}$. Eliminering ger t=2, s=-1 så linjerna skär varandra i punkten (1,4,3).

6. Vi ansätter $y = kx + m$ och de givna punkterna ger därför systemet

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Multiplikation med transponatet till 2x4-matrisen ger systemet

$\begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ med lösningen $\begin{pmatrix} K \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.4 \\ 4.5 \end{pmatrix}$

Så den bästa linjen är $= -1.4x + 4.5$

7. Samtliga påståenden är sanna.

8. $\det A = 4s^2 - 7s + 3 = 0$ om $s = 1$ eller $s = {}^{3}/_{4}$
   Vi löser systemet för dessa s-värden.

   s = 1:
   $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   s = ¾:
   $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{3}{4} & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & \frac{7}{4} & 3 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Svar: För s=1, oändligt många lösningar, för s=3/4 inga lösningar, för alla andra s-värden entydig lösning.

9.
   a. För den inversa avbildningen gäller $T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $T^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

      Matrisen för $T^{-1}$ är $Q^{-1}$ som alltså är $= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

   b. Arean av *W* är = 3 och $\det Q^{-1} = 8$ så arean av $T(W) = \frac{3}{8}$

10. Vi förutsätter att varken *u* och *w* är nollvektorn.

    $u \cdot w = |u||w| \cos\theta$ och $|u \times w| = |u||w| \sin\theta$ så
    $|u \cdot w|^2 + |u \times w|^2 = |u|^2|w|^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$.

    Svar: 1