MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: Inga, inte ens miniräknare
Datum: 2017-10-26 kl. 14.00 - 18.00
Telefonvakt: Hossein Raufi
Telefon: 070-449 02 37

LMA019 Algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentamen krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2017 räknas med. För betyg 4 och 5 krävs dessutom 33 respektive 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 respektive 6 poäng från den andra delen (överbetygsdelen).
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift omfattar 15 p och finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.**

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $Q = (3, 1, 3)$ och $\pi_1 : x - y + z = 1$.

(a) Bestäm ekvationen för det plan π_2 som innhåller punkten Q och är parallellt med planet π_1. (2 p)

(b) Beräkna det minsta avståndet från Q till π_1. (2 p)

3. (a) Definiera vad det innebär att en avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär. (2 p)

(b) En linjär avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ avbildar $(1, 0, 0)$ på $(2, 3)$, $(0, 1, 0)$ på $(0, 1)$ och $(1, 0, 1)$ på $(2, -1)$. Bestäm standardmatrisen till T. (2 p)

4. Bestäm med hjälp av minsta kvadratmetoden den bästa approximativa anpassningen av en rät linje till punkterna $(-1, 2), (0, 3), (2, 4)$ och $(3, 5)$. (3 p)

5. Lös matrisekvationen $AX + B = BX + I$, där (4 p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Beräkna volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1, -1, -3)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, 2)$ och $\mathbf{v}_3 = (-3, 0, 13)$. (3 p)

Var god vänd!

7. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Någon motivering skall inte ges. 1 poäng för varje korrekt svar, -1 poäng för varje felaktigt svar. Dock inte mindre än 0 poäng totalt.

(a) Om $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ där A är en 3×3-matris och T är surjektiv, så är T även injektiv.

(b) Om z är ett komplext tal sådant att $\bar{z} = \frac{3}{z}$, så är $|z| < 2$.

(c) För alla $n \times n$-matriser A, B och C gäller att om $\det(A) \neq 0$ och $AB = AC$, så är $B = C$.

(d) Om kolumnerna i en 3×3-matris A är linjärt beroende, så kan inte ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha en unik lösning för någon vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

(e) Om det för en $n \times n$-matris A gäller att $A^2 = A$, så måste $\det(A) = 1$.

Del 2: Överbetygsdelen

8. (a) Definiera vad som menas med det linjära höljet av en mängd vektorer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$, där $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$. (1 p)

(b) Bestäm minsta avståndet från $P = (3, 4, 5)$ till det linjära höljet av $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. (3 p)

9. (a) Visa att $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$ (2 p)

(b) Visa att $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$ (2 p)

10. (a) Låt $\mathbf{u}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$. Visa att $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \bullet \mathbf{u}$. (1 p)

(b) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^n$. Visa att om $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$ så gäller att (3 p)

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2.$$

Vad betyder detta geometriskt då $n = 2$ eller $n = 3$? (Det är tillåtet att använda resultatet i (a) även om man inte lyckas bevisa det.)

Lycka till!

/Hossein

Anonym kod	**LMA019 Algebra 2017-10-26**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm en vektor som har längden 1 och är vinkelrät mot de två vektorerna $(1, 2, 3)$ och $(2, -1, 1)$. (3 p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ (3 p)

Lösning:

Svar: ....

(c) För vilket eller vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ ligger vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 6, 1)$ och $\mathbf{v}_3 = (5, a, -11)$ i samma plan? (3 p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna determinanten (3 p)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Lösning:

Svar: ....

(e) Förenkla det komplexa talet $\dfrac{(-1+i)^{27}}{(\sqrt{3}-i)^{18}}$ så långt som möjligt. (3 p)

Lösning:

Svar: ....