MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens miniräknare**

Chalmers tekniska högskola

Tentamen

Datum: 2017-12-19 kl. 14.00 - 18.00

Telefonvakt: Hossein Raufi

Telefon: 070-449 02 37

LMA019 Algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentamen krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2017 räknas med. För betyg 4 och 5 krävs dessutom 33 respektive 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 respektive 6 poäng från den andra delen (överbetygsdelen).
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift omfattar 14 p och finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.**

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

2. (a) Bestäm ekvationen för det plan som innhåller punkten $(-2, 0, 3)$ och är vinkelrät mot den räta linjen, (2 p)

$$\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t - 7 \\ z = -3t - 6 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(b) Bestäm skärningspunkten mellan den räta linjen och planet i (a). (2 p)

3. (a) Definiera vad det innebär att en avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är injektiv. (2 p)

(b) Visa att den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som avbildar $(1, 0)$ på $(1, 2)$, och $(0, 1)$ på $(1, 3)$ är injektiv. (2 p)

4. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning. (1 p)

(b) Definiera vad som menas med en *minsta kvadratlösning* till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (1 p)

(c) Beräkna minsta kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (2 p)

5. Lös matrisekvationen $AXA^T = B$, där (4 p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Var god vänd!

6. Bestäm $h \in \mathbb{R}$ så att produkten AB har determinanten -48 då (3 p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & h & 1 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

7. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Någon motivering skall inte ges. 1 poäng för varje korrekt svar, -1 poäng för varje felaktigt svar. Dock inte mindre än 0 poäng totalt.

(a) Om $AB = BA$ så gäller även att $A^2B = BA^2$.

(b) Om $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast har den triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, så har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ båda endast den trivila lösningen $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(c) För alla $n \times n$-matriser A och B gäller att $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(d) Om A är en $m \times n$-matris med en pivot-position i varje rad, så är $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar för varje vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

(e) Avbildningen $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_3 + 1, -x_1 - 2)$ är linjär.

Del 2: Överbetygsdelen

8. Bestäm för alla värden på konstanterna a och b, antalet lösningar till (3 p)

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 = b \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

9. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som uppfyller (4 p)

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

och låt R beteckna en rektangel med bredd 2 och höjd 3. Beräkna arean av $T(R)$.

10. Linjen L_1 går genom punkterna $A = (3, -3, 4)$ och $B = (2, -1, 3)$ och linjen L_2 går genom punkterna $C = (3, 0, 2)$ och $D = (-3, 6, 0)$. Dessa två linjer har en skärningspunkt, bestäm den! (5 p)

Lycka till!

/Hossein

Anonym kod	**LMA019 Algebra 2017-12-19**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller de tre punkterna $A = (1, 2, 3)$, $B = (-2, 3, 0)$ och $C = (5, 0, -1)$. (3 p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ (3 p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Beräkna vektorprojektionen, $\mathbf{u}_\mathbf{v}$, av $\mathbf{u} = (7, 2, -2)$ längs $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. (2 p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna determinanten av B^{-1} då (3 p)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösning:

Svar: ....

(e) Förenkla det komplexa talet $\dfrac{(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^{21}}{(3 + i\sqrt{3})^{48}}$ så långt som möjligt. (3 p)

Lösning:

Svar: ....