MATEMATIK **Hjälpmedel: Inga, inte ens miniräknare**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2018-08-20 kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: Johan Berglind

Telefon: ankn 3525

LMA019 Algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentamen krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2017 räknas med. För betyg 4 och 5 krävs dessutom 33 respektive 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 respektive 6 poäng från den andra delen (överbetygsdelen).

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift omfattar 15 p och finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.**

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller den räta linjen (4 p)

$$\frac{x+3}{2} = y-5 = \frac{z-1}{3}$$

och är parallell med skärningslinjen mellan de två planen $x+y+2z=5$ och $x+y=3$.

3. (a) Definiera vad det innebär att en avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är surjektiv. (2 p)

(b) En linjära avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ är sådan att $T(0,0,1) = (-1,1)$, $T(1,0,1) = (1,1)$, och $T(1,1,0) = (0,1)$. Bestäm standardmatrisen till T. (2 p)

4. Bestäm med hjälp av minsta kvadratmetoden den bästa approximativa anpassningen av en rät linje till punkterna $(1,1), (0,0), (2,-1)$ och $(-1,-2)$. (3 p)

5. Lös matrisekvationen $AXB = C + AX$, där (4 p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Betrakta ekvationssystemet (3 p)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 11x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Beräkna x_3 med hjälp av Cramers regel.

Var god vänd!

7. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Någon motivering skall inte ges. 1 poäng för varje korrekt svar, -1 poäng för varje felaktigt svar. Dock inte mindre än 0 poäng totalt.

(a) För alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att $\sin(x)\cos(x) \leq \frac{1}{2}$.

(b) Om t är ett reellt tal så gäller att $|e^{-it}| = 1$.

(c) För alla vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ gäller att $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$.

(d) Om A är en kvadratisk matris och $A^T A = I$ så är $\det(A) = \pm 1$.

(e) Om $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är rotation medurs $\frac{\pi}{4}$-radianer kring origo, så är T både injektiv och surjektiv.

Del 2: Överbetygsdelen

8. Låt $P = (4, 3, 7)$. Bestäm koordinaterna för P:s spegelbild i planet $x - y - z = 0$. (4 p)

9. Bestäm för alla värden på konstanterna a och b, antalet lösningar till (4 p)

$$\begin{cases} x + 2y + 2az = 1 \\ \quad\;\; y + az = b \\ x + y + (2a-1)z = 3 \end{cases}$$

10. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^n$. Visa att (4 p)

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \leq \frac{|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2}{2}.$$

(Ledning: $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$)

Lycka till!

/Hossein

Anonym kod	**LMA019 Algebra 2018-08-20**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm konstanten $a \in \mathbb{R}$ så att de två vektorerna $\mathbf{u} = (1, 2, a)$ och $\mathbf{v} = (5, 10, -1)$ blir parallella. (3 p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning som uppfyller $T(1, 0) = (1, -1)$ och $T(0, 1) = (2, 1)$. Finn ett $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ sådan att $T(\mathbf{x}) = (1, 1)$. (3 p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ där $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ och $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 5)$. Ligger vektorn $\mathbf{u} = (3, 4, 5)$ i W. (3 p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna determinanten av A^3 då (3 p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(e) Beräkna inversen till matrisen (3 p)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....