LÖSNINGAR TILL TENTAMEN I ALGEBRA, LMA019, 1 NOVEMBER 2018

1a $|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Andra kvadranten: $\cos x < 0$.

<u>Svar:</u> $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

1b $z^5 = -32i = 32\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$$z = 32^{1/5}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}\right)\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi(3+4n)}{10} + i\sin\frac{\pi(3+4n)}{10}\right)$$

<u>Svar:</u> $z = 2\left(\cos\frac{\pi(3+4n)}{10} + i\sin\frac{\pi(3+4n)}{10}\right)$

$(n = 0, 1, 2, 3, 4.)$

1c Låt T vara den linjära avbildningen och låt A vara matrisen.

$T(\hat{e}_1) = \hat{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad T(\hat{e}_2) = -(\hat{e}_2) = -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} T(\hat{e}_1) & T(\hat{e}_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ $\quad$ <u>Svar:</u> $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

1d $1\cdot 3\cdot 6\cdot 10 = 180$ $\quad$ <u>Svar:</u> 180

$\boxed{2a}$ Två vektorer i planet:

$$(0,3,2)-(-1,1,1) = (1,2,1)$$
$$(2,1,0)-(-1,1,1) = (3,0,-1)$$

En normalvektor: $(1,2,1)\times(3,0,-1) =$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2)\hat{\imath} - (-1-3)\hat{\jmath} + (-6)\hat{k} =$$
$$= (-2,4,-6) = -2(1,-2,3)$$

Ekvation för planet: $x-2y+3z=d$

Vi bestämmer konstanten d genom att sätta in $(x,y,z)=(0,3,2)$: $-2\cdot 3+3\cdot 2=0$

<u>Svar:</u> $x-2y+3z=0$

$\boxed{2b}$ En riktningsvektor till linjen:

$$(4,2,1)-(3,-1,-1) = (1,3,2)$$

En punkt på linjen: $(4,2,1)$

<u>Svar:</u> $(x,y,z) = (4,2,1) + t(1,3,2)$

$\boxed{2c}$ Vi sätter in linjens ekvationer

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$ i planets ekvation $x - 2y + 3z = 0$:

$$(4+t) - 2(2+3t) + 3(1+2t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + t - 4 - 6t + 3 + 6t = 0 \Leftrightarrow t = -3$$

Vi sätter in $t = -3$ i linjens ekvationer:

$$\begin{cases} x = 4 + (-3) \\ y = 2 + 3(-3) \\ z = 1 + 2(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -7 \\ z = -5 \end{cases}$$

<u>Svar:</u> $(x, y, z) = (1, -7, -5)$

(3) Vektorer längs två av sidorna:

$$\vec{u} = (5, 4, 2) - (3, 4, -1) = (2, 0, 3)$$

$$\vec{v} = (5, 4, 2) - (1, 2, 0) = (4, 2, 2)$$

Arean av triangeln ges av $\frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-6)\hat{\jmath} - (4-12)\hat{\jmath} + 4\hat{k} = (-6, 8, 4)$$

$$\frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2}|2(-3, 4, 2)| = |(-3, 4, 2)| =$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$$

<u>Svar:</u> $\sqrt{29}$

(4) Vi låter vektorerna vara kolumnerna i en (3×3)-matris A. De är linjärt beroende precis då $\det A = 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = -3(-a) - 2a = a$$

<u>Svar:</u> $a = 0$

(5) Låt A vara matrisen för T.

$$\begin{cases} A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \Leftrightarrow A = \frac{1}{-1-4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(6) Låt $y = kx + m$ vara ekvationen för linjen.

Då får vi konstanterna k och m från den minsta kvadratlösningen till $A\vec{x} = \vec{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 24 - 4 = 20 \neq 0$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} A^T \vec{b} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -16 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}6 \\ 3{,}3 \end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> $y = -\frac{8}{5}x + \frac{33}{10}$

$\boxed{7a}$ <u>Falskt!</u> Motexempel:

Om $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ så har systemet

$A\vec{x} = \vec{0}$ bara den triviala lösningen (dvs kolumnerna i A är linjärt oberoende) men systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ har ingen lösning (eftersom kolumnerna inte spänner hela $\mathbb{R}^4$).

$\boxed{7b}$ <u>Sant!</u> $\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = \frac{|z|}{|z|} = 1$

$\boxed{7c}$ <u>Sant!</u> $\sin y,\ \cos y \leq 1$ för alla y.

$$\sin x + \cos 2x + \sin 3x \leq 1+1+1 = 3 < 4$$

$\boxed{7d}$ <u>Sant!</u>

$$\left((AB)^{-1}A\right)B = (AB)^{-1}(AB) = I_n$$

$$A\left(B(AB)^{-1}\right) = (AB)(AB)^{-1} = I_n$$

Alltså är $(AB)^{-1}A$ en invers till B, och $B(AB)^{-1}$ är en invers till A.

$\boxed{7e}$ <u>Sant!</u> $A\left((A^T)^{-1}\right)^T = (A^T)^T\left((A^T)^{-1}\right)^T =$

$$= \left((A^T)^{-1}A^T\right)^T = (I_n)^T = I_n$$

Alltså är $\left((A^T)^{-1}\right)^T$ en invers till A.

8

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & s & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & s \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} s & 2 \\ -2 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & s \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(s^2+4) - (-2-3s) = -(s-2)(s-1)$$

Om $s \neq 2$ och $s \neq 1$ så är alltså $\det M \neq 0$ och då har systemet $M\vec{x} = \vec{b}$ en entydig lösning. Om $s = 1$ så får vi den utökade koefficientmatrisen $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $\longrightarrow$

(forts.)

→ Eftersom de två sista kolumnerna är lika ser vi direkt att $\vec{x} = \hat{e}_3 = (0,0,1)$ är en lösning, och eftersom det $M = 0$ då $s = 1$ vet vi också att det finns en icke-trivial lösning $\vec{y} \neq \vec{0}$ till motsvarande homogena system $M\vec{x} = \vec{0}$.

$$\begin{cases} M\vec{x} = \vec{b} \\ M\vec{y} = \vec{0} \end{cases} \iff \begin{cases} M\vec{x} = \vec{b} \\ M(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{b} \end{cases}$$

Eftersom $\vec{y} \neq \vec{0}$ är $\hat{e}_3 + \vec{y} \neq \hat{e}_3$ och det finns ytterligare en lösning $\hat{e}_3 + \vec{y}$ till systemet $M\vec{x} = \vec{b}$. Därmed måste det finnas oändligt många lösningar.

Om $s = 2$ så får vi den utökade koefficient-matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 & -3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Den sista raden svarar mot ekvationen $0 = 1$.

<u>Svar:</u> $s \neq 1, 2$: exakt en lösning

$s = 1$: oändligt många lösningar

$s = 2$: inga lösningar

(9) $\cos(2x) - 5\cos x - 2 =$

$= (2\cos^2 x - 1) - 5\cos x - 2 =$

$= 2\cos^2 x - 5\cos x - 3$

Sätt $\cos x = c$. Vi ska lösa andragrads-ekvationen $2c^2 - 5c - 3 = 0$.

$2c^2 - 5c - 3 = 0 \iff$

$c^2 - 2\frac{5}{4}c = \frac{3}{2} \iff$

$c^2 - 2\frac{5}{4}c + \frac{25}{16} = \frac{24}{16} + \frac{25}{16} \iff$

$\left(c - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \iff c = \frac{5}{4} \pm \frac{7}{4}$

$\frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3 > 1$ Kan ej vara ett cos-värde!

$\frac{5-7}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ ok!

$\cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

<u>Svar:</u> $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ för alla heltal n.

(10) Eftersom $\vec{x} = (1, 1, \dots, 1)$ är en icke-trivial lösning till $A\vec{x} = \vec{0}$ måste $\det A = 0$.

<u>Svar:</u> 0