LÖSNINGAR TILL TENTAMEN I ALGEBRA, LMA019, 7 JANUARI 2019

1a

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

1b

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{1\cdot(-1)+1\cdot 2+4\cdot 2}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}} =$$

$$= \frac{-1+2+8}{\sqrt{18}\sqrt{9}} = \frac{9}{\sqrt{18}\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{9}{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$(0 \leq \theta \leq \pi)$

<u>Svar:</u> $\theta = \frac{\pi}{4}$

1c

$$\frac{(1+i)^{18}}{2^7} = \frac{1}{2^7}\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)^{18} =$$

$$= 2^{-7}\left(2^{1/2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{18} =$$

$$= 2^{-7}\, 2^{\frac{1}{2}\cdot 18}\left(\cos\frac{18\pi}{4} + i\sin\frac{18\pi}{4}\right) =$$

$$= 2^{-7}2^{9}\left(\cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}\right) = 2^{9-7}\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\right) =$$

$$= 2^2 i = 4i$$

<u>Svar:</u> $4i$

$\boxed{1d}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 4 = 180$$

<u>Svar:</u> 180

(2)

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4z = 2 \\ y - 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = t \end{cases}$$

<u>Svar:</u> $(x, y, z) = (2, 1, 0) + (4, 3, 1)\,t$

(3) Tre av hörnen: $P = (1, 2, 1)$, $Q = (-1, 1, -3)$, $R = (0, 1, -5)$

$$\overrightarrow{QP} = (1, 2, 1) - (-1, 1, -3) = (2, 1, 4)$$

$$\overrightarrow{RP} = (1, 2, 1) - (0, 1, -5) = (1, 1, 6)$$

$$\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{RP} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (6-4)\hat{\imath} - (12-4)\hat{\jmath} + (2-1)\hat{k} = (2, -8, 1)$$

$$|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{RP}| = \sqrt{2^2 + (-8)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 64 + 1} = \sqrt{69}$$

<u>Svar:</u> $\sqrt{69}$

$\boxed{4a}$ Sätt $t = -\frac{x+2}{2} = -7+y = -1-\frac{z}{7}$.

$$\begin{cases} t = -\frac{x+2}{5} \\ t = -7+y \\ t = -1-\frac{z}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2-5t \\ y = 7+t \\ z = -7-7t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (-2, 7, -7) + t(-5, 1, -7)$$

<u>Svar:</u> $\begin{cases} \text{Punkt på linjen:} & (-2, 7, -7) \\ \text{Riktningsvektor:} & (-5, 1, -7) \end{cases}$

$\boxed{4b}$ Riktningsvektorn för linjen är en normalvektor för planet ortogonalt mot linjen. Detta ger ekvationen

$-5x + y - 7z = d$ där d är en konstant som vi bestämmer genom att sätta in $(x, y, z) = (1, 3, -1)$. Eftersom punkten med dessa koordinater ligger i planet måste ekvationen vara uppfylld då.

$$-5\cdot 1 + 3 - 7(-1) = d \Leftrightarrow d = -5+3+7 \Leftrightarrow d = 5$$

<u>Svar:</u> $-5x + y - 7z = 5$

(5) Sätt $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ och $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Den minsta kvadratlösningen till systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ ges av lösningen till systemet $(A^TA)\vec{x} = A^T\vec{b}$.
Om matrisen A^TA är inverterbar (dvs om $\det(A^TA) \neq 0$) så är detta ekvivalent med $\vec{x} = (A^TA)^{-1}A^T\vec{b}$.

(forts.) $\longrightarrow$

(5) (forts.)

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^TA) = 6 \cdot 6 - (-1)(-1) = 36 - 1 = 35 \neq 0$$

$$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1} A^T \vec{b} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 33 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{3}{35} \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> $\begin{cases} x_1 = 33/35 \\ x_2 = -12/35 \end{cases}$

(6) Sätt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ och låt A_i $(i = 1, 2)$ vara (2×2)-matrisen som fås genom att byta ut kolumn i i A mot $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -3 - 3 \cdot 2 = -9$$

$$\det A_1 = -3 - 2 \cdot 2 = -7$$

$$\det A_2 = 2 - 3 = -1$$

Cramers regel: lösningen ges av

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{7}{9}, \qquad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{1}{9}.$$

<u>Svar:</u> $\begin{cases} x = 7/9 \\ y = 1/9 \end{cases}$

$\boxed{7a}$ Falsht!

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ej definierat då $\cos\theta = 0$,

dvs då $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$\boxed{7b}$ Falsht!

Det finns endast tre möjligheter:

Inga lösningar, precis en lösning eller oändligt många.

$\boxed{7c}$ Sant!

Om $z = a + ib$ och $w = c + id$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$

så $z + w = (a+c) + i(b+d)$ och $\overline{z+w} = (a+c) - i(b+d) =$

$= (a - ib) + (c - id) = \bar{z} + \bar{w}$.

$\boxed{7d}$ Sant! $B = C = A^{-1}$

$$\begin{cases} AB = 1 \\ CA = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(AB) = C1 \\ (CA)B = 1B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} CAB = C \\ CAB = B \end{cases} \Rightarrow C = B$$

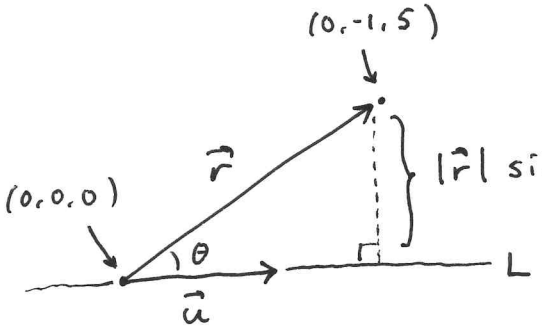
$\boxed{7e}$ Sant!

Om $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_p\vec{v}_p = \vec{0}$ och minst ett av talen $a_1, a_2, \dots, a_p$ är nollskillt, säg $a_1 \neq 0$, så kan vi dividera med detta och få

$$\vec{v}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\vec{v}_2 - \dots - \frac{a_p}{a_1}\vec{v}_p.$$

(8) Vektorerna $\vec{u} = (1, 2, -2)$ och $\vec{v} = (-3, -6, 6)$ är parallella. Det linjära höljet av dem är en linje L parallell med $\vec{u}$ och $\vec{v}$ genom origo.

Låt $\vec{r}$ vara ortsvektorn för punkten $(0, -1, 5)$.



$$|\vec{r}| \sin\theta = \frac{|\vec{u}||\vec{r}| \sin\theta}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{u} \times \vec{r}|}{|\vec{u}|}$$

$$\vec{u} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (10-2)\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - \hat{k} = (8, -5, 1)$$

$$|\vec{u} \times \vec{r}| = \sqrt{64 + 25 + 1} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\frac{|\vec{u} \times \vec{r}|}{|\vec{u}|} = \frac{3\sqrt{10}}{3} = \sqrt{10}$$

<u>Svar:</u> $\sqrt{10}$

(9) Låt B vara matrisen för T. Eftersom S och T är linjära avbildningar får vi

$$T(S(2\vec{x})) = 6\vec{x} \iff 2\,T(S(\vec{x})) = 6\vec{x} \iff 2BA = 6I_2$$

$$\iff BA = 3I_2 \iff B = 3A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 2 - (-1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> $\frac{3}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(10) Låt $\vec{u} = (-1, 3, -a)$ och $\vec{v} = (a, -6, 4)$ vara riktningsvektorer för linjerna och låt $\vec{w}$ vara en vektor från en punkt på den ena linjen till en punkt på den andra linjen, till exempel $\vec{w} = (3, -1, 4) - (2, 0, 7) = (1, -1, -3)$.

Linjerna ligger i samma plan om och endast om $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ är linjärt beroende, dvs om $\det A = 0$ där $A = (\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w})$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 1 \\ 3 & -6 & -1 \\ -a & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 3 & -6 & -1 \\ -a & 4 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -a & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -a & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(18+4) - a(-9-a) + (12-6a) =$$

$$= -22 + 9a + a^2 + 12 - 6a = -10 + 3a + a^2 = (a+5)(a-2)$$

$$\det A = 0 \iff a = -5 \text{ eller } a = 2$$

<u>Svar:</u> $a = -5$ (linjerna skär varandra) och
$a = 2$ (linjerna är parallella)