Lösningsförslag till tentamen i matematisk analys LMA019, den 17 augusti 2020

1. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $z^4 - z^3 + z - 1 = 0$ på formen $z = a + ib$

Lösning: Vi ser att $z=1$ är ett nollställe till polynomet $p(z) = z^4 - z^3 + z - 1 = (z^3+1)(z-1)$. Om man inte ser faktoriseringen så polynomdividera $p(z)$ med $z-1$ som är en faktor i $p(z)$ enligt faktorsatsen. Den binomiska ekvationen $z^3+1=0$ har rötterna $z_k = e^{(\pi i + 2\pi k)/3}$, $k=0,1,2$. Detta ger de fyra rötterna till den ursprungliga ekvationen.

Svar: $1, \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Bestäm samtliga lösningar till ekvationerna

a) $\sin x + \cos x = 2$

b) $\sin x + \cos x = 0$

Lösning: Vi gör omskrivningen

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\frac{\pi}{4}} \sin x + \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\frac{\pi}{4}} \cos x\Big) = \sqrt{2}\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)$$

där vi använt additionsformeln för sinus.

Fall a): $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) = 2$ ger $\sin(x+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} > 1$.

Alltså saknar lösningar då $|\sin \tilde{x}| \le 1$ för alla $\tilde{x} \in \mathbb{R}$.

Fall b) $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) = 0$ ger $\sin(x+\frac{\pi}{4}) = 0$

Då $\sin\tilde{x} = 0 \iff \tilde{x} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ för samtliga lösningar som $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Svar: a) lösningar saknas

b) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, k heltal

3. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkterna $(1,1,-1)$, $(0,2,1)$ och $(2,0,-3)$

Lösning: Sätt $A = (1,1,-1)$, $B = (0,2,1)$, $C = (2,0,-3)$.

En normalvektor $\vec{n}$ till planet ges av

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (-1,1,2) \times (1,-1,-2) = \vec{0}$$

Vi noterar att vektorerna $\vec{AB}$ och $\vec{AC}$ är parallella. Det finns inget entydigt bestämt plan som innehåller punkterna A, B och C. Givetvis kan man bestämma alla plan som innehåller den räta linje som innehåller A, B och C.

Svar: Uppgiften är felkonstruerad.

4 Lös ekvationen $A(X^T + I)B^{-1} = I$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösning: Då $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$ ser vi att A^{-1} och B^{-1} existerar och att X är en 2×2-matris. Vi har

$$A(X^T + I)B^{-1} = I \Leftrightarrow X^T + I = A^{-1}B \Leftrightarrow X = (A^{-1}B - I)^T =$$
$$= (A^{-1}B)^T - I^T = B^T(A^{-1})^T - I$$

Vi noterar att

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och alltså} \quad (A^{-1})^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^T(A^{-1})^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

vilket ger

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Svar: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

5 a) Bestäm skärningslinjen mellan planen $x + y - z = 0$ och $2x - y = 1$

Lösning: Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -3y+2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}z+\frac{1}{3} \\ y=\frac{2}{3}z-\frac{1}{3} \end{cases}$$

Med $t=z$ fås

$$(x,y,z)=\left(\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},0\right)+t\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},1\right), \quad t\in\mathbb{R}$$

<u>Svar:</u> $(x,y,z)=\left(\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3},0\right)+t\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},1\right), \ t\in\mathbb{R}$

b) Bestäm den minsta vinkeln mellan z-axeln och normalen till ett plan som innehåller vektorerna $(1,1,-1)$ och $(-1,1,1)$.

Lösning: En normalvektor $\vec{n}$ till planet ges av

$\vec{n}=(1,1,-1)\times(-1,1,1)=(2,0,2)$

Sätt $\vec{k}=(0,0,1)$ och beräkna skalärprodukten $\vec{k}\cdot\vec{n}$.

$\vec{k}\cdot\vec{n}=(0,0,1)\cdot(2,0,2)=2=|\vec{k}||\vec{n}|\cos\theta=1\cdot\sqrt{8}\cdot\cos\theta$

där θ är vinkeln mellan $\vec{k}$ och $\vec{n}$. Den sökta vinkeln ges av $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ dvs $\theta=\frac{\pi}{4}$

<u>Svar:</u> $\frac{\pi}{4}$.

6) Bestäm den räta linje som i minsta kvadratmetodens mening bäst anpassar till punkterna $(1,-2),(2,4),(3,5)$ och $(4,6)$

Lösning: Låt $y=kx+m$ vara ekvationen för linjen

Sätt

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\3&1\\4&1\end{pmatrix}, \quad \vec{x}=\begin{pmatrix}k\\m\end{pmatrix}, \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\4\\5\\6\end{pmatrix}$$

Vi vill bestämma k och m som löser $A\vec{x}=\vec{b}$ i minsta kvadratmeningen, dvs lösningen till normalekvationerna

$$A^TA\vec{x}=A^T\vec{b} \quad \text{dvs} \quad \vec{x}=(A^TA)^{-1}A^T\vec{b}$$

Vi har

$$A^TA = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}, \quad (A^TA)^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 30 \end{pmatrix}$$

$$A^T\vec{b} = \begin{pmatrix} 45 \\ 13 \end{pmatrix}$$

och alltså

$$\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 45 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> $y = \frac{5}{2}x - 3$

7) Bestäm de värden på konstanten r som gör att systemet

$$\begin{cases} (r-1)x + (r+2)y = 5 \\ x + (r+2)y = r+3 \end{cases}$$

får en entydig lösning. Lös systemet för dessa värden på r med Cramers regel.

Lösning: Systemet har en entydig lösning om och endast om

$$\det\begin{pmatrix} r-1 & r+2 \\ 1 & r+2 \end{pmatrix} \neq 0$$

dvs $(r-1)(r+2) - 1\cdot(r+2) = (r+2)(r-2) \neq 0$ dvs $r \neq \pm 2$

Cramers regel ger för $r \neq \pm 2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & r+2 \\ r+3 & r+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r-1 & r+2 \\ 1 & r+2 \end{vmatrix}} = \frac{(r+2)(5-(r+3))}{(r+2)(r-2)} = \frac{2-r}{r-2} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} r-1 & 5 \\ 1 & r+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r-1 & r+2 \\ 1 & r+2 \end{vmatrix}} = \frac{(r-1)(r+3)-5}{(r+2)(r-2)} = \frac{r^2+2r-8}{(r+2)(r-2)} =$$

$$= \frac{(r+1)^2-9}{(r+2)(r-2)} = \frac{(r+4)(r-2)}{(r+2)(r-2)} = \frac{r+4}{r+2}$$

<u>Svar:</u> $r \neq \pm 2$.

För $r \neq \pm 2$ gäller $(x,y) = \left(-1, \frac{r+4}{r+2}\right)$

8) Avgör om vektorerna $(1,1,0,3)$, $(2,-1,1,0)$ och $(4,1,1,1)$ är linjärt beroende

Lösning: Betrakta $\lambda_1(1,1,0,3) + \lambda_2(2,-1,1,0) + \lambda_3(1,1,1,1) =$
$= (0,0,0,0)$. Om det finns en lösning där

minst att λ är $\neq 0$ så är vektorerna linjärt beroende, annars är de linjärt oberoende. Vi noterar att

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eftersom varje kolumn är pivotkolumner finns bara den triviala lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

<u>Svar:</u> vektorerna är linjärt beroende

(9) Bestäm avståndet mellan linjerna

L_1: $(x, y, z) = (4t-3, -2t+3, t)$ och

L_2: $(x, y, z) = (2t-5, -3t+11, t)$

Lösning: Linjen L_1 har riktningsvektor $\vec{v}_1 = (4, -2, 1)$ och punkten $P_1 = (-3, 3, 0) \in L_1$.

Linjen L_2 har riktningsvektor $\vec{v}_2 = (2, -3, 1)$ och punkten $P_2 = (-5, 11, 0) \in L_2$.

Det sökta avståndet ges av $\dfrac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$.

Här är

$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (1, -2, -8)$, $\overrightarrow{P_1P_2} = (-2, 8, 0)$

$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = -18$

och alltså $|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = \sqrt{69}$.

<u>Svar:</u> $\dfrac{18}{\sqrt{69}}$

(10) A $m \times n$-matris. Systemet $Ax = b$ där b är en kolumnvektor med m komponenter. Vilken/vilka av möjligheterna: ingen lösning, exakt en lösning, oändligt många lösningar kan uteslutas i fallen

a) $m < n$

b) b är nollvektorn.

Lösning:

a) systemet är underbestämt vilket ger att det finns antingen inga lösningar eller oändligt många lösningar

Svar: Fallet ekvivalent en lösning kan uteslutas

b) systemet är homogent vartför det finns precis en lösning (den triviala $x = 0$) eller oändligt många lösningar.

Svar: Fallet lösning saknas kan uteslutas