MATEMATIK Datum: 2019–01–07
Chalmers tekniska högskola Tid: 14.00–18.00

Tentamen i Algebra, LMA019

Hjälpmedel: inga. Examinator och telefonvakt: Johan Berglind, 031–772 35 25.

Ange den tillfälliga tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt. För godkänt på tentamen krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2018 räknas med i denna del. För betyg 4 och 5 krävs dessutom 33 respektive 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 respektive 6 poäng från den andra delen (överbetygsdelen). Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok cirka tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på ett separat blad på vilket lösningar och svar skall anges. Bladet lämnas in tillsammans med övriga lösningar.

2. Bestäm skärningslinjen mellan planen $x - 2y + 2z = 0$ och $2x - 3y + z = 1$. (3p)

3. Beräkna arean av parallellogrammen med hörn i punkterna $(1, 2, 1)$, $(-1, 1, -3)$, $(2, 2, -1)$ och $(0, 1, -5)$. (3p)

4. Låt L vara linjen som ges av ekvationerna

$$-\frac{x+2}{5} = -7 + y = -1 - \frac{z}{7}\,.$$

a) Ange en punkt på linjen och en vektor parallell med L. (3p)

b) Bestäm en ekvation för planet som är ortogonalt mot L och som innehåller punkten $(1, 3, -1)$. (3p)

5. Bestäm den minsta kvadratlösningen till följande ekvationssystem. (4p)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases}$$

6. Lös följande ekvationssystem med hjälp av Cramers regel. (3p)

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 3y = 2 \end{cases}$$

7. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Någon motivering skall inte ges. Uppgiften ger 1 poäng för varje korrekt svar och -1 poäng för varje felaktigt svar, dock inte mindre än 0 poäng totalt.

a) För varje vinkel θ finns det ett värde på $\tan\theta$.

b) Ett linjärt ekvationssystem kan ha precis två olika lösningar.

c) För alla komplexa tal z och w gäller $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

d) Om A, B och C är $(n \times n)$-matriser och $AB = CA = I_n$ så är $B = C$.

e) Om en uppsättning vektorer är linjärt beroende så är en av dem en linjärkombination av de andra.

Del 2: Överbetygsdelen

8. Bestäm det kortaste avståndet mellan punkten $(0, -1, 5)$ och det linjära höljet av vektorerna $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ och $\mathbf{v} = (-3, -6, 6)$. (4p)

9. Låt $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning som ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Bestäm matrisen för en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sådan att $T(S(2\mathbf{x})) = 6\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. (4p)

10. Bestäm alla reella värden på a sådana att linjerna $(2, 0, 7) + s(-1, 3, -a)$ och $(3, -1, 4) + t(a, -6, 4)$ ligger i samma plan. (4p)

Anonym kod	LMA019 190107	Poäng

1. Till nedanstående fyra deluppgifter skall korta lösningar redovisas. Svar måste anges på anvisad plats. Svar och lösningar till dessa uppgifter kan inte redovisas på andra sidor.

a) Bestäm matrisen för en rotation i planet moturs vinkeln $\pi/3$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

b) Bestäm vinkeln θ mellan vektorerna $\mathbf{u} = (1, 1, 4)$ och $\mathbf{v} = (-1, 2, 2)$. (4p)

Lösning:

Svar: ....

c) Förenkla uttrycket (4p)

$$\frac{(1+i)^{18}}{2^7}.$$

Lösning:

Svar: ....

d) Beräkna determinanten (3p)

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....