Svar/lösningar till tentamen

Algebra LMA019

19/aug 2019

(1) a) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$ b) $\begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} z_1 = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{3\pi}{8}i} \\ z_2 = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{11\pi}{8}i} \end{cases}$ d) $t = -\frac{\pi}{6} + n\pi$ $n \in \mathbb{Z}$

(2) a) $\begin{cases} x = t \\ y = 2t-1 \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ linje i rummet!

b) Planets normal är parallell med skärningslinje.

Ekvationen blir

$x + 2y + z = 4$

(3) Elimination leder till

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -5y = 1 \\ -5y = 2 \end{cases}$$ som saknar lösning

Minsta kvadratlösningen är lösning till

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dvs $$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 45 \\ -10 \end{pmatrix}$$

(4) Vi vet att det finns tal a och b, ej båda $=0$ sådana att $a\bar{u} + b\bar{v} = 0$

Betrakta $x(\bar{u} + 2\bar{v}) + y(3\bar{u} - \bar{v}) =$

$= (x + 3y)\bar{u} + (2x - y)\bar{v}$ som är $= 0$

~~för~~ för något x o y, inte båda $=0$

eftersom $\begin{cases} x + 3y = a \\ 2x - y = b \end{cases}$ har lösning.

Svar: De är linjärt beroende

(5)

$$\begin{vmatrix} w+4 & w-2 \\ 4 & w-3 \end{vmatrix} = (w+1)(w-4)$$

Systemet har entydig løsning om $w \neq -1$, $w \neq 4$

Da blir

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & w-2 \\ 1 & w-3 \end{vmatrix}}{w^2-3w-4} = \frac{1}{w+1} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} w+4 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{w^2-3w-4} = \frac{1}{w+1}$$

(6)

$$X = A^{-1}B(A^t)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

(7)

a) S

b) F

c) S

d) F

e) F

(8) Två linjer $l_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{3}{2} - t \\ z = \frac{3}{2} - t \end{cases}$ $l_2: \begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = -3t + 4 \\ z = t \end{cases}$

$\bar{n} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = (2, -1, -1) \times (2, -3, 1) = -4(1, 1, 1)$

Ett plan med normal $\bar{n}$ och som innehåller linjen l_1: $x + y + z = 3$

Avstånd mellan punkten $(-5, 11, 0)$ till planet blir $= \frac{|-5 + 11 - 3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

(9) Eftersom $T(\bar{e}_1) = T\left(\frac{u - v}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$T(\bar{e}_2) = T\left(\frac{u + v}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Så matrisen M för T är $= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

Eftersom $\det M = 6$ och arean av bilden av K är $= 6$ blir arean av K 1

(10) $Bx = 0 \Rightarrow ABx = 0 \Rightarrow Ix = 0 \Rightarrow x = 0$

Alltså är kolonnerna i B linjärt oberoende

dvs B har minst lika många rader som kolonner.