Tentamen i Algebra LMA 019 MATEMATIK

2019 – 08 – 19 kl 8.30 – 12.30 Chalmers

Hjälpmedel: inga

Examinator: Johan Berglind

Telefonvakt: Johan Berglind, 3525

Ange den tillfälliga tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentamen krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2018 räknas med i denna del. För betyg 4 och 5 krävs dessutom 33 respektive 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 respektive 6 poäng från den andra delen (överbetygsdelen).

Lösningar läggs ut på kursens hemsida.

Resultat meddelas via Ladok cirka tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på ett separat blad på vilket lösningar och svar skall anges. Bladet lämnas in tillsammans med övriga lösningar.

2.
   a. Bestäm skärningen mellan de två planen $x + y - 3z + 1 = 0$ och $y - 2z + 1 = 0$. Beskriv skärningen geometriskt. **(3p)**

   b. Bestäm en ekvation för det plan som bildar rät vinkel mot bägge planen i uppgiften ovan och som innehåller punkten (1,1,1) **(2p)**

3. Visa att systemet $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - y = 1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ saknar lösning.

   Använd minsta kvadratmetoden för att hitta en approximativ lösning. **(5p)**

4. Antag att vektorerna *u* och *v* är linjärt beroende.
   Avgör huruvida vektorerna $u + 2v$ och $3u - v$ är linjärt beroende. **(4p)**

5. För vilka värden på konstanten w har följande system entydig lösning:

$$\begin{cases}(w+4)x & + & (w-2)y & = & 2\\ 4x & + & (w-3)y & = & 1\end{cases}$$

För dessa värden, lös systemet med Cramers regel. **(4p)**

6. Lös matrisekvationen $AXA^t = B$ där $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(4p)**

7. Avgör om följande påståenden är sanna eller falskt. Någon motivering skall inte ges. 1 poäng för varje korrekt svar, -1 poäng för varje felaktigt. Dock inte mindre än 0 poäng totalt.

   a. $2x - y + z = 1$ och $4x - 2y + 2z = 2$ är ekvationer för samma plan.

   b. Det existerar ett komplext tal *z* sådant att $z \cdot \bar{z} = -1$

   c. $\sin^3 x + \cos^3 x \leq 1$ för alla reella tal *x*.

   d. Låt A vara en kvadratisk matris och antag att systemet $Ax = 0$ har icke-triviala lösningar. Då vet vi säkert att $Ax = b$ har oändligt många lösningar.

   e. Om *a* och *b* är två vektorer i $\mathbb{R}^3$ gäller att $a \times b = b \times a$

Överbetygsdelen

8. Bestäm avståndet mellan linjerna $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$ och $\begin{cases} x + y + z & = & 6 \\ x - 2z & = & -5 \end{cases}$ **(4p)**

9. Låt *T* vara en linjär avbildning i planet sådan att $T(u) = -2v$ och $T(v) = 3u$

   där $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Låt vidare K vara en fyrhörning i planet.

   Antag att bilden av K under *T* är en rektangel med hörn i punkterna (-2,1), (-2,3), (1,1) samt (1,3).

   Bestäm arean av K. **(4p)**

10. Låt *A* och *B* vara matriser, inte nödvändigtvis kvadratiska, sådana att $AB = I$ där *I* är enhetsmatrisen.

    Visa att B inte kan ha fler kolonner (kolumner) än rader. **(4p)**

    Ledning: betrakta ekvationen $Bx = 0$

Anonym kod	LMA019 19xxxx	Poäng

Uppgift 1. Till nedanstående fyra deluppgifter skall korta lösningar redovisas. Svar måste anges på anvisad plats.

Svar och lösningar till dessa uppgifter kan inte redovisas på andra sidor.

a) Bestäm en vektor som bildar rät vinkel mot både $a = (2,3,-1)$ och $b = (1,0,1)$ och som har längden 1. **(2p)**

Lösning:

Svar: ………..

b) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} 2x - y & = & -2 \\ -x + \frac{y}{2} & = & 1 \end{cases}$ **(2p)**

Lösning:

Svar: ………..

c) Bestäm alla komplexa tal *z* sådana att $z^2 + 1 - i = 0$ **(3p)**

Lösning:

Svar: ……

d) Bestäm alla vinklar t sådana att $\sqrt{3}\tan t + 1 = 0$ **(4p)**

Lösning:

Svar: …….