

LMA 033 Matematik BI1 och KI1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 20 poäng. För betyg 4 resp. 5 krävs 30 resp. 40 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkänddelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)

2. Förenkla följande uttryck så långt som möjligt. (4p)

a) $\frac{x^2 - y^2}{(y - x)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}$ b) $(\frac{1}{\cos x} - \tan x)(\frac{1}{\cos x} + \tan x).$

Lösning:

a) $\frac{x^2 - y^2}{(y - x)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})} = \frac{(x - y)(x + y)}{-(x - y)\frac{(y + x)}{xy}} = -xy.$

b) $(\frac{1}{\cos x} - \tan x)(\frac{1}{\cos x} + \tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1.$

3. Funktionen $f(x) = \tan^2 x$ är given. Lös ekvationen $f'(x) = 0$. (4p)

Lösning:

$$f'(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$$

$1 + \tan^2 x > 0$ så det gäller att lösa ekvationen $\tan x = 0$, som har lösningen $x = n\pi$.

4. Funktionen $f(x) = \ln(x^2 - 6x)$ är given. (6p)

- (a) Ange funktionens definitionsmängd.

Lösning:

Villkor: $x(x - 6) > 0$ vilket är detsamma som $x < 0 \vee x > 6$.

- (b) Ange funktionens nollställen.

Lösning:

Vi ska lösa ekvationen $x^2 - 6x = 1$ som har lösningarna $x = 3 \pm \sqrt{10}$.

(c) Bestäm en ekvation för den tangent som har x -koordinaten 7.

Lösning:

$$f(7) = \ln(49 - 42) = \ln 7.$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 6x}(2x - 6) \Rightarrow f'(7) = \frac{8}{7}.$$

Insättning i tangentens ekvation ger

$$y - \ln 7 = \frac{8}{7}(x - 7) \Leftrightarrow y = \frac{8}{7}x - 8 + \ln 7.$$

5. Lös dubbelolikheten $\frac{1}{x} \leq 1 < x^2$. (5p)

Lösning:

Vi delar upp i två fall:

Fall I: $\frac{1}{x} \leq 1$ som är detsamma som $x < 0 \vee x \geq 1$.

Fall II: $1 < x^2$, som är detsamma som $x < -1 \vee x > 1$.

Lösningsmängden för dubbelolikheten har vi då Fall I och Fall II sammanfaller d.v.s. då $x < -1 \vee x > 1$.

6. Lös ekvationen $\sin(x + \pi) = \cos x$. (3p)

Lösning:

Vi har att $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ och får då följande ekvation att lösa:

$$\sin(\pi + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

som har lösningarna

$$\text{I. } x + \pi = (\frac{\pi}{2} - x) + n2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + n\pi.$$

$$\text{II. } x + \pi = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) + n2\pi. \text{ Lösning saknas i detta fall.}$$

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

7. Vilka logiska samband gäller mellan följande utsagor(motivera!). (4p)

$$P: x^2 \leq 2x + 3, \quad Q: x - 2 < 2x - 3 \leq 3 - x, \quad R: |x - 1| \leq 2.$$

Lösning:

P kan skrivas $x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) \leq 0$ vilket är detsamma som $-1 \leq x \leq 3$.

För Q gäller att vänstra olikheten $x - 2 < 2x - 3 \Leftrightarrow x > 1$. För den högra olikheten gäller $2x - 3 \leq 3 - x \Leftrightarrow x \leq 2$. Vänster och höger olikhet sammanfaller då $1 < x \leq 2$.

För utsagan R gäller att $-2 \leq x - 1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

De logiska sambanden blir då:

$$P \Leftrightarrow Q, Q \Rightarrow P, Q \Rightarrow R.$$

8. Lös ekvationen $\ln(e^{-x} + 2) = x$. (4p)

Lösning:

Vi skriver om vänster led och höger led med basen e och får

$$e^{\ln(e^{-x}+2)} = e^x$$

och får då följande ekvation att lösa

$$e^{-x} + 2 = e^x \Leftrightarrow 1 + 2e^x = e^{2x}.$$

Nu sätter vi att $e^x = t$ och får följande andragrads ekvation att lösa:

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

som har lösningen

$$t_1 = 1 + \sqrt{2} \vee (t_2 = 1 - \sqrt{2})$$

.

Vi får då att

$$e^x = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

9. Bestäm konstanterna a och b så att kurvorna $y = ax^3 + b$ och $y = \frac{4}{x}$ skär varandra under (4p)

rät vinkel i punkten $(2, 2)$.

Lösning:

Vi sätter $f(x) = ax^3 + b$ och $g(x) = \frac{4}{x}$. Vi bestämmer konstanten a genom sambandet $f'(2) = -\frac{1}{g'(2)}$ d.v.s. att tangenten till f i punkten $(2, 2)$ är lika med normalen till g i samma punkt. Vi får då att

$$a = \frac{1}{12}$$

Konstanten b får vi genom sambandet $f(2) = g(2)$ d.v.s. att funktionsvärdena för f och g är lika i punkten $(2, 2)$ och att vi nu vet värdet på konstanten a som är $\frac{1}{12}$.

$$b = \frac{4}{3}.$$

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	LMA 033 Matematik BI1 och KI1 121024	sid.nummer 1	Poän
------------	--------------------------------------	-----------------	------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Bestäm med hjälp av derivatans definition $f'(x)$ då $f(x) = x^2 - 2x$. (3p)

Lösning:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - 2(x+h) - (x^2 - 2x)}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h - x^2 + 2x}{h} \\ &= \frac{h(2x + h - 2)}{h} = (2x + h - 2) \rightarrow 2x - 2 \text{ då } h \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Svar: $2x - 2$

- (b) Beräkna $f'(4)$ då $f(x) = e^{\sqrt{x}}$. (3p)

Lösning:

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$f'(4) = e^{\sqrt{4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{e^2}{4}.$$

Svar: $\frac{e^2}{4}$

- (c) Ekvationen $x^3 - 5x - 2 = 0$ har en heltalsrot. Ange denna rot samt ekvationens övriga rötter. (4p)

Lösning:

Satsen om heltalsrötter ger att vi finner $x = -2$ som rot till ekvationen $x^3 - 5x - 2 = 0$

Polynomdivision ger $\frac{x^3 - 5x - 2}{x + 2} = x^2 - 2x - 1$. Återstår att lösa ekvationen

$x^2 - 2x - 1 = 0$ som har lösningarna $x = 1 \Rightarrow \pm\sqrt{2}$.

Svar: $x_1 = -2$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, $x_3 = 1 - \sqrt{2}$

- (d) Lös ekvationen $|x - 2| - x = 10$. (3p)

Lösning:

För $x < 2$: $-(x - 2) - x = 10$ som har lösningen $x = -4$ som är ok!

För $x \geq 2$: $(x - 2) - x = 10$. Lösning saknas.

Svar: $x = -4$

- (e) Bestäm inversen $\phi(x)$ till funktionen $y = e^x - 2$. Ange också D_ϕ . (3p)

Lösning:

Vi löser ut x ur $y = e^x - 2$ och får $x = \ln(y + 2)$. Vi ser att y är omvändbar och inversen är

$\phi(x) = \ln(x + 1)$ med $D_\phi = (-2, \infty)$.

Svar: $\phi(x) = \ln(x + 1)$, $D_\phi = (-2, \infty)$