MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 130116 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Christoffer Standar
0703 088304

LMA 033 Matematik BI1 och KI1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 20 poäng. För betyg 4 resp. 5 krävs 30 resp. 40 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)

2. Bestäm centrum och halvaxlar i den ellips som har ekvationen $2x^2 - 4x + y^2 + 2y = 3$. (3p)

Lösning:

Kvadratkomplettering ger

$$2((x-1)^2 - 1^2) + (y+1)^2 - 1^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow$$
$$2(x-1)^2 + (y-1)^2 = 6$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{6} = 1$$

Vi har då en ellips med centrum i $(1, -1)$ och halvaxlarna $\sqrt{3}$ och $\sqrt{6}$.

3. Förenkla utrycket $\dfrac{\frac{x^2}{y} + 2x + y}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}$ så långt som möjligt. (3p)

Lösning:

$$\frac{\frac{x^2}{y} + 2x + y}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}} = \frac{\frac{x^2+2xy+y^2}{y}}{\frac{x^2-y^2}{yx}} = \frac{\frac{(x+y)^2}{y}}{\frac{(x-y)(x+y)}{yx}} = \frac{x(x+y)}{x-y}.$$

4. Undersök om funktionen $f(x) = |x+2| + x + |x-3|$ har några nollställen. Ange i så fall dessa. (4p)

Lösning:

Vi ska lösa ekvationen $|x+2| + x + |x-3| = 0$. Brytpunkterna för absolutbeloppen är $x = -2$ och $x = 3$.

För $x < -2$ får vi följande ekvation att lösa

$$-(x+2)+x-(x-3)=0$$

som har lösningen $x=1$ som är en falsk rot.

För $-2 \leq x < 3$ får vi ekvationen

$$(x+2)+x-(x-3)=0$$

som har lösningen $x=-5$ som är en falsk rot.

För $x \geq 3$ får vi ekvationen

$$(x+2)+x+(x-3)=0$$

som har lösningen $x=\dfrac{1}{3}$ som också är en falsk rot. Slutsatsen blir att funktionen saknar nollställen.

5. Funktionen $f(x)=\ln(x^3-4x^2)$ är given. (4p)

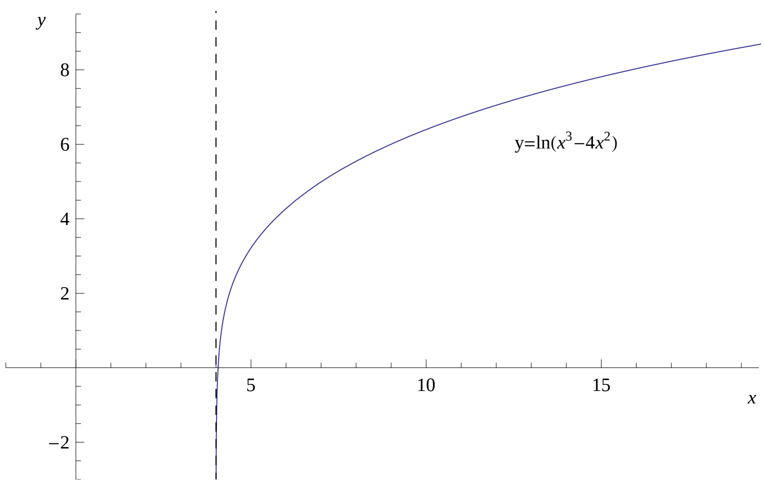
(a) Ange funktionens definitionsmängd.

Lösning:

Vi ska lösa olikheten $x^3-4x^2 \ > \ 0 \Leftrightarrow x^2(x-4) \ > \ 0$ och ser att olikheten är uppfylld för $x \ > \ 4$.

(b) Skissera grafen till f.

Lösning:



6. Derivera uttrycket $e^{\sqrt{\cos x^2}}$. (4p)

Lösning:

$$\begin{aligned}
De^{\sqrt{\cos x^2}} &= e^{\sqrt{\cos x^2}} \cdot D\sqrt{\cos x^2} \\
&= e^{\sqrt{\cos x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos x^2}} \cdot D\cos x^2 \\
&= e^{\sqrt{\cos x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos x^2}} \cdot (-\sin x^2) \cdot Dx^2 \\
&= e^{\sqrt{\cos x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos x^2}} \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x \\
&= -e^{\sqrt{\cos x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x^2}} \cdot \sin x^2 \cdot x.
\end{aligned}$$

7. Låt $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}) + \cos x$. Lös ekvationen $f'(x) = 0$. (4p)

Lösning:

$f'(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4}) - \sin x$.
$f'(x) = 0$ och att $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ ger oss följande ekvation att lösa

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

som har lösningen

$$x = \frac{\pi}{8} + n\pi.$$

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

8. Vilka logiska samband gäller mellan följande utsagor(motivera!). (4p)

$$P:\ x^2 - 6x + 5 = 0, \quad Q:\ x + 1 \leq 3x - 1 \leq 3 + x, \quad R:\ x^2 + 8 \geq 6x.$$

Lösning:

P kan skrivas $x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 0$ vilket är detsamma som $x = 1 \vee x = 5$.

För Q gäller att vänstra olikheten $x + 1 \leq 3x - 1 \Leftrightarrow x \geq 1$. För den högra olikheten gäller $3x - 1 \leq 3 + x \Leftrightarrow x \leq 2$. Vänster och höger olikhet sammanfaller då $1 \leq x \leq 2$.

För utsagan R gäller att $x^2 - 6x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) \geq 0$ vilket är detsamma som $x \leq 2 \vee x \geq 4$.

De logiska sambanden blir då:

$P \Rightarrow R$ och $Q \Rightarrow R$.

9. Funktionen $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$ är given.

(a) Bestäm inversen $\phi(y)$ till f. (2p)

Lösning:

Vi löser $f(x) = y$ d.v.s.

$$\frac{3x-1}{x+2} = y \Leftrightarrow 3x - 1 = y(x+2) \Leftrightarrow x(3-y) = 2y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{3-y},\ y \neq 3.$$

Så inversen $\phi(y)$ ges av

$$\phi(y) = x = \frac{2y+1}{3-y},\ y \neq 3.$$

(b) Bestäm funktionen g så att $g(f(x)) = 2x$ för alla $x \neq -2$. (2p)

Lösning:

Vi sätter $f(x) = y$ och vet enligt uppgift a) att $x = \phi(y)$ vilket ger

$$g(f(x)) = 2x \Leftrightarrow g(y))2x \Leftrightarrow g(y) = 2\phi(y) \Leftrightarrow g(y) = 2\frac{2y+1}{3-y},\ y \neq 3.$$

10. Lös ekvationen $x + \ln(e^x - 3) = \ln 10$. (4p)

Lösning:

Vi sätter $e^x = t \Leftrightarrow x = \ln t$. Insättning i ekvationen ger

$$\ln t + \ln(t-3) = \ln 10$$

Vi tillämpar en av logaritmlagarna på vänster led och får ekvationen

$$\ln(t(t-3)) = \ln 10$$

att lösa. Omskrivning av båda leden med basen e ger oss följande ekvation att lösa

$$t^2 - 3t = 10$$

som har lösningen

$$t_1 = -2 \text{ falsk } \vee \; t_2 = 5 \text{ ok!}$$

Vi får då att

$$e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5.$$

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	LMA 033 Matematik BI1 och KI1 130116	sid.nummer 1	Poän

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm med hjälp av derivatans definition $f'(x)$ då $f(x) = x^2 + 4x$. (3p)

Lösning:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2+4(x+h)-(x^2+4x)}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2+4x+4h-x^2-4x}{h}$$
$$= \frac{h(2x+h+4)}{h} = (2x+h+4) \to 2x+4 \text{ då } h \to 0.$$

Svar: $2x+4$ ....

(b) Beräkna $f'(\pi)$ då $f(x) = \tan 2x$. (3p)

Lösning:

$$f'(x) = (1+\tan^2 2x)\cdot D(2x) = (1+\tan^2 2x)\cdot 2$$
$$f'(\pi) = (1+(\tan(2\pi))^2\cdot 2 = (1+0)\cdot 2 = 2$$

Svar: $f'(\pi) = 2$. ....

(c) Ekvationen $x^3+3x^2-2x-6=0$ har en heltalsrot. Ange denna rot samt ekvationens övriga rötter. (4p)

Lösning:

Möjliga rötter:$\pm 1, \pm, 2\pm, 3\pm 6$. Efter prövning finner vi att $x=-3$ är en rot till $x^3+3x^2-2x-6=0$.
Om vi dividerar x^3+3x^2-2x-6 med $x+3$ får vi kvotpolynomet $k(x) = x^2-2$.
Löser vi $k(x)=0$ får vi övriga två rötter $x = \pm\sqrt{2}$

Svar: $x_1 = -3,\ x_2 = \sqrt{2},\ x_3 = -\sqrt{2}$. ....

(d) Lös ekvationen $(\lg x)^2 = \lg x$. (3p)

Lösning:

$(\lg x)^2 = \lg x \Leftrightarrow \lg x(\lg x - 1) = 0$
Fall I: $\lg x = 0$ har lösningen $x=1$.
Fall II: $\lg x - 1 = 0$ har lösningen $x = 10$.

Svar: $x_1 = 1,\ x_2 = 10$. ....

(e) Lös ekvationen $\sqrt{\frac{1-2x}{8}} - x = 0$.

Lösning:

$\sqrt{\frac{1-2x}{8}} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-2x}{8}} = x$. Kvadrering av båda leden ger $\frac{1-2x}{8} = x^2$
Denna andragradsekvation har lösningarna $x_1 = -\frac{1}{2}$ som är en falsk rot och $x_2 = \frac{1}{4}$ som är ok efter prövning i ekvationen $\sqrt{\frac{1-2x}{8}} = x$.

Svar: $x = \frac{1}{4}$ ....