Tentamen i matematik del B för BI 1 och Fartygsdesign och matematik del C för KI, 20070118

OBS! Uppgift 3 nedan är delad så att studenter på Kemiingenjörsprogrammet gör uppgiften märkt **KI**, medan övriga studenter gör uppgiften märkt **Ö**.

1. (a) Bevisa att om matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ kommuterar, så är $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ kvadratiska och av samma typ. (2,5p)

   (b) Bevisa att om matrisen $\mathbf{A}$ är inverterbar, så finns endast *en* invers. (2,5p)

2. Visa att avståndet d från punkten P_1 med ortsvektorn $\mathbf{r_1}$ till den räta linjen L med ekvationen $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + t\mathbf{v}$ ges av formeln $d = \dfrac{|\mathbf{v} \times (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_0})|}{|\mathbf{v}|}$. (5p)

3. **KI** Förenkla uttrycket $\left(e^{j\frac{19\pi}{60}}\right)^{10} \cdot \left(e^{j\frac{\pi}{40}}\right)^{100}$. Svara på formen $x + jy$.

   Ö Beräkna alla λ som uppfyller determinantekvationen

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \mathbf{E} \right| = 0,$$

   där $\mathbf{E}$ är enhetsmatrisen (ettor på diagonalen nollor i övrigt) av ordning 3. (3 p)

4. Lös ekvationsystemet för samtliga värden på parametern p.

$$\begin{cases} 7x & +2y & -z & = px \\ x & +6y & +z & = py \\ -x & +2y & +7z & = pz \end{cases}$$

   (5 p)

5. Anpassa med minsta kvadratmetoden en rät linje $y = kx + m$ till punkterna $(-2, 4)$, $(-1, 3)$, $(2, 1)$ och $(3, -2)$. Medelfelet behöver ej beräknas. (4 p)

6. Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Beräkna $\mathbf{A}^{-1}$. (2p)

   (b) Lös matrisekvationen $\mathbf{X\,A} = \mathbf{B}$ genom att använda (a). (2p)

   (c) Lös ekvationen i (b) genom att ta transponatet av ekvationen och använda metoden med totalmatris. (3p)

OBS! Uppgifterna 7 och 8 finns på nästa sida

7. (a) Låt $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Bestäm t så att $\mathbf{u}$ är ortogonal mot $\mathbf{u} + t\mathbf{v}$. (2p)

   (b) Givet $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 6$, $|\mathbf{a}| = 3$ och $|\mathbf{b}| = 4$, beräkna $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. (2p)

   (c) Visa att $|\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})| = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ och $\mathbf{u} \times (\mathbf{2u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ för alla vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Motivera utförligt. (4p)

8. Givet punkterna $A = (5, 2, 3)$, $B = (0, 2, 4)$, $C = (-1, -3, 5)$, $D = (3, -2, 1)$.

   (a) Beräkna $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. (2p)

   (b) Beräkna ekvationen för det plan π som innehåller punkterna A, B och C. (2p)

   (c) Beräkna arean av triangeln ABC. (1p)

   (d) Beräkna volymen av tetraedern ABCD. (2p)

   (e) Ange ekvationen för en linje som ligger på avståndet 5 le från planet π i (b). (3p)

   (f) Beräkna spegelbilden av punkten C i linjen genom A och B. (3p)