

Tentamen i LMA033 0399 Matematik, del B, för BI1 och LMA515 0304 Matematik, del C, för KI1 onsdagen den 7 mars 2012.

Tid: 8.30 - 12.30 **Hjälpmedel:** Inga!

Examinator: Håkan Blomqvist **Telefon:** Magnus Önnheim, tel. 0703-088304

Behandla högst en uppgift per blad! Däremot kan deluppgifter, t ex **1a** och **1b** behandlas på samma blad. Lösningarna skall vara fullständigt redovisade och svaren fullständigt förenklade! **Tentamen omfattar 8 uppgifter** och totalt 50 p. För godkänt krävs minst 20p. Resultatet meddelas via LADOK. Tentamina återlämnas och granskas i samband med någon föreläsning under läsperiod 4. Tidpunkt och lokal meddelas på kursens hemsida. Den som inte kan delta vid granskningen kan sedan hämta och granska sin tenta på Matematiska vetenskapers studieexpedition, måndag till fredag, kl 8.30-13.00. Eventuella klagomål på rättningen skall lämnas skriftligt.

1. Definiera följande begrepp:

a) trappstegsmatris b) rang c) vektorprodukt (1p+0,5p+1,5p)

2.a) Bevisa att om matrisen **A** är inverterbar, så är inversen entydigt bestämd. (2p)

b) Visa att triangelns area ges av formeln: $T_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$. (1p)

c) Visa att, (gör även figur), volymen av tetraedern ABCD ges av formeln:

$$V_{ABCD} = \pm \frac{1}{6} \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right) \bullet \overrightarrow{AD}. \quad (4p)$$

3. Låt ES vara ekvationssystemet
$$\begin{cases} 2x + ay + z = a^2 + 1 \\ 3x - 2y + z = 3 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}.$$

a) Beräkna $\det \mathbf{A}$ där **A** är koefficientmatrisen till ES, och avgör, med hjälp av resultatet, för vilka värden på a som **A** är inverterbar. (2p)

b) Beräkna x med Cramers regel, för de värden på a för vilka detta är möjligt. (2p)

c) Lös, med eliminationsmetoden på matrisform, ES för $a = -1$. (2p)

4. Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Beräkna \mathbf{B}^{-1} . (2p)

b) Kontrollera svaret i **4a** med hjälp av inversens definition. (1p)

c) Lös matrisekvationen $\mathbf{AXB} - 2\mathbf{C} = \mathbf{XB}$. (4p)

OBS! Problemen 5 – 8 finns på nästa sida.

5. Låt ES vara ekvationssystemet
$$\begin{cases} px + 2y = 2 \\ x + y = 1 \\ x + py = 2 \end{cases}$$

a) Lös ekvationssystemet ES för de värden på parametern p för vilka ES har lösningar. Använd eliminationsmetoden på matrisform. (4p)

b) I fallet $p = 1$ saknar ES exakt lösning. Lös för $p = 1$ ekvationssystemet ES approximativt med minsta kvadratmetoden och beräkna medelfelet. (5p)

6. För vektorerna \mathbf{a} och \mathbf{b} gäller att $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 4$. Det gäller också att $\theta = \arccos \frac{1}{4}$ där θ är vinkeln mellan \mathbf{a} och \mathbf{b} .

a) Beräkna $|2\mathbf{a} - \mathbf{b}|$. (2p)

b) Beräkna vinkeln mellan \mathbf{a} och $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$. (2p)

c) Beräkna $|(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})|$. ($\theta = \arccos \frac{1}{4} = \arcsin \frac{\sqrt{15}}{4}$) (2p)

7. I ett ONH-system är punkterna $A = (1; 0; 1)$, $B = (3; 1; 1)$ $C = (4; 1; 5)$ och $D = (-1; 2; 4)$ givna.

a) Beräkna $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. (1,5p)

b) Visa att ekvationen för det plan Π som innehåller punkterna A, B och C är $4x - 8y - z - 3 = 0$. (1,5p)

c) Beräkna höjden i tetraedern ABCD genom att beräkna arean av triangeln ABC och volymen av tetradern ABCD samt sedan använda formeln $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot T_{ABC} \cdot h$. (2p)

d) Beräkna höjden i tetraedern ABCD genom att först beräkna projektionen D_{proj} av punkten D på planet Π och sedan beräkna längden av vektorn $\overrightarrow{DD}_{proj}$. (3p)

8. Låt Π_1 vara planet $2x + y - 2z - 7 = 0$, låt Π_2 vara planet $x - z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}y$

och låt L vara linjen $x = y - 2 = \frac{z - 3}{2}$.

a) Visa att planen Π_1 och Π_2 är parallella. (1p)

b) Punkten M ligger på linjen L och har lika stort avstånd till båda planen. Beräkna koordinaterna för M. (3p)