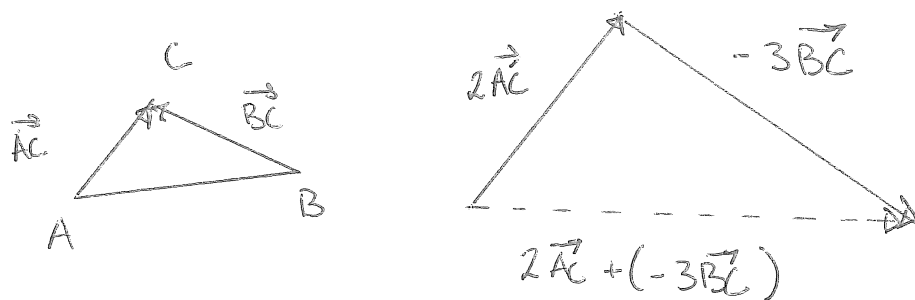


1. a)



$$b) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k} = \langle 2, 1, -4 \rangle$$

$$c) \quad \vec{v}_1 = \langle 3-2, 2-1, 1-0 \rangle = \langle 1, 1, 1 \rangle$$

$$\vec{v}_2 = \langle 5-2, 4-1, 4-1 \rangle = \langle 3, 3, 3 \rangle = 3\langle 1, 1, 1 \rangle = 3\vec{v}_1$$

Ja de är parallella.

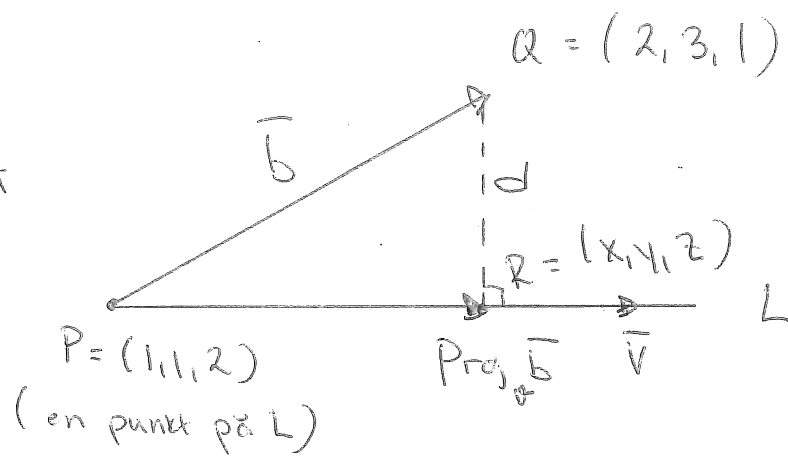
$$d) \quad V = \left| \det [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3] \right| = \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \left| 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right| =$$

$$\left| 3 + 4 - 12 \right| = \left| -5 \right| = 5 \text{ v.e.}$$

1 e)

- Tag en punkt P på L



- en riktningsvektor till L , $\vec{u} = \langle 1, 2, -5 \rangle$

Projektionssatsen ger

$$\text{Proj}_{\vec{u}} \vec{b} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} = \frac{\langle 1, 2, -1 \rangle \cdot \langle 1, 2, -5 \rangle}{5} \langle 1, 2, -5 \rangle$$

$$= \frac{10}{5} \langle 1, 2, -5 \rangle = \langle 2, 4, -10 \rangle$$

Vi söker punkten $R = (x, y, z)$

$$\Rightarrow x - 1 = 2 \quad y - 1 = 4 \quad z - 2 = -10$$

$$\Rightarrow R = (x, y, z) = (3, 5, -8)$$

Avståndet blir då

$$\begin{aligned} d = |RQ| &= \sqrt{(2-3)^2 + (3-5)^2 + (1+8)^2} = \\ &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 9^2} = \sqrt{85} \quad \text{l.c.} \end{aligned}$$

2 b) Linjärt Oberoende om

$$x_1 \bar{v}_1 + x_2 \bar{v}_2 + x_3 \bar{v}_3 = 0$$

endast har trivial lösning

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Totalmatris

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & a & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \end{bmatrix}$$

Trivial lösning om och endast om

$$a+1 \neq 0 \quad (\Rightarrow a \neq -1)$$

$$\Rightarrow x_3 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_1 = 0$$

3. b) Vi har att

$$\vec{n}_1 = \langle 1, -2, 4 \rangle \text{ och } \vec{n}_2 = \langle -2, 1, 1 \rangle$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \langle 1, -2, 4 \rangle \cdot \langle -2, 1, 1 \rangle = -2 - 2 + 4 = 0$$

$\Rightarrow$ Planen är vinkelräta

$$c) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -5/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -4/3 \\ 0 & 1 & -3 & -5/3 \end{bmatrix}$$

x_1, x_2 bundna variabler x_3 fri variabel

$$x_3 = t, \quad x_2 = -\frac{5}{3} + 3t, \quad x_1 = -\frac{4}{3} + 2t$$

($z = t, \quad y = -5/3 + 3t, \quad x = -4/3 + 2t$)

d) Tag t.ex. $t=0$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0\right)$$

$$4. \quad AX - A = BX \Leftrightarrow AX - BX = A \Leftrightarrow$$

$$(A-B)X = A \Leftrightarrow X = (A-B)^{-1}A$$

om $(A-B)^{-1}$ existerar

$$A-B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jacobis

$$\begin{bmatrix} (A-B) & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & (A-B)^{-1} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$X = (A-B)^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 5/2 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

5. Linjärkombination

$$\bar{u} = c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 + c_3 \bar{v}_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ -2 & 5 & 0 & 11 \\ 2 & 5 & 8 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & h+10 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & h+9 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} \text{Lösning endast om} \\ h = -9 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_1, x_2 bundna x_3 fri

$$x_3 = 5t, \quad x_2 = \frac{1}{5} + 4t, \quad x_1 = -5 - 10t$$

Om t.ex. $t=0$ får vi

$$x_1 = -5, \quad x_2 = \frac{1}{5}, \quad x_3 = 0$$

$\Rightarrow$

$$-5 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}_{\bar{v}_1} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}_{\bar{v}_2} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}_{\bar{v}_3} = \begin{bmatrix} -5 + 0 \\ 10 + 1 \\ -10 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ -9 \end{bmatrix}_{\bar{u}} \quad h=-9$$

och vi ser att $\bar{u}$ är en linjärkombination av $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$

6. Sant

$$\begin{aligned} a) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \\ &= |\vec{a}| |\vec{b}| \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

b) Falskt

VL är en vektor

HL är en skalär

(Formeln lyder $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$)

c) Sant

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \leq \frac{1}{2} \cdot 1$$

d) Sant

$$AB = BA$$

($\Rightarrow$)

$$\underbrace{A^{-1}A}_I B = A^{-1}BA$$

($\Rightarrow$)

$$B = A^{-1}BA$$

($\Rightarrow$)

$$BA^{-1} = A^{-1}B \underbrace{AA^{-1}}_{=I}$$

($\Rightarrow$)

$$BA^{-1} = A^{-1}B$$

7

Vi lägger l_1 i ett plan π ,
 som är parallell med l_2
 (se figur!)

$Q \in l_2$ $R \in \pi$ (men ligger på l_1)
 $P \in \pi$

Att beräkna kortaste avståndet
 mellan l_1 och l_2 blir samma

som att beräkna avståndet mellan P och Q

$\Rightarrow |\vec{PQ}|$ sökes!

R är en punkt i planet men också en punkt på l_1

$\Rightarrow R = (3, 1, 3)$ (tag $t=0$ på l_1)

Projektionssatsen ger

$$\vec{PQ} = \frac{\vec{RQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}, \quad \text{där } \vec{RQ} = \langle 1-3, -2-1, 1-3 \rangle = \langle -2, -3, -2 \rangle$$

en normalvektor till planet

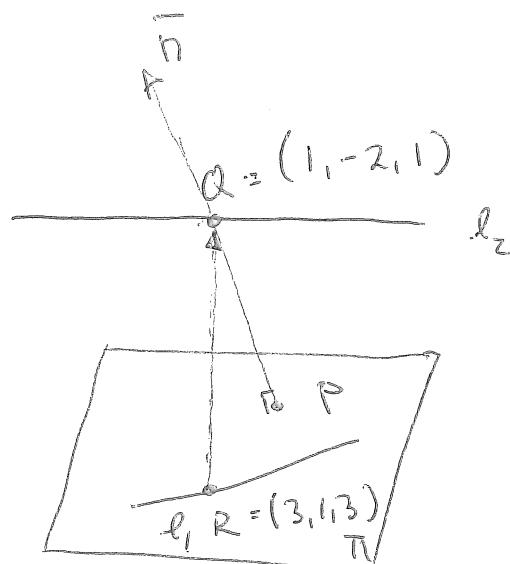
$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \dots = \langle -1, -7, -2 \rangle$$

$$\Rightarrow \vec{PQ} = \frac{\langle -2, -3, -2 \rangle \cdot \langle -1, -7, -2 \rangle}{54} \langle -1, -7, -2 \rangle$$

$$= \frac{2+21+4}{54} \langle -1, -7, -2 \rangle = \frac{1}{9} \langle -1, -7, -2 \rangle$$

Avståndet blir då

$$|\vec{PQ}| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 7^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{54}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$



(8)

Ex. Låt $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildningen som ges av spegling i linjen $x_1 + 2x_2 = 0$ följt av rotation vinkeln $\frac{\pi}{4}$ moturs. Bestäm matrisen för T m.a.p. standardbasen i $\mathbb{R}^2$.

lsg/ T är sammansättningen av två linjära avbildningar:

$$T = T_2 \circ T_1, \text{ där } T_1$$

är speglingen och T_2 är rotationen.

Om A_1 och A_2 är avbildningsmatriserna till T_1 resp. T_2 då är avbildningsmatrisen

just $A_2 A_1$.

$$\begin{array}{l} T_1(\bar{e}_1) = A_1 \bar{e}_1 \quad T_1(\bar{e}_2) = A_1 \bar{e}_2 \\ T_2(T_1) = T_2(A_1 \bar{e}_1) = T_2(A_1) \bar{e}_1 = A_2 A_1 \bar{e}_1 \end{array}$$

$$T(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 - 2 \text{proj}_{\bar{n}} \bar{e}_1 \quad ; \text{ där } \bar{n} = \langle 1, 2 \rangle \text{ är normalen till linjen}$$

$$T(\bar{e}_2) = \bar{e}_2 - 2 \text{proj}_{\bar{n}} \bar{e}_2$$

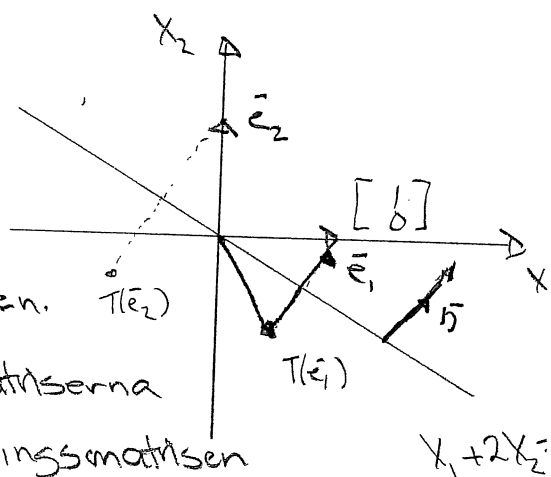
$$\text{proj}_{\bar{n}} \bar{e}_1 = \frac{\bar{e}_1 \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2} \bar{n} = \frac{\langle 1, 0 \rangle \cdot \langle 1, 2 \rangle}{5} \bar{n} = \frac{1}{5} \bar{n} = \left\langle \frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right\rangle$$

$$T(\bar{e}_1) = (1, 0) - 2 \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right)$$

$$\text{proj}_{\bar{n}} \bar{e}_2 = \frac{\bar{e}_2 \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2} \bar{n} = \frac{(0, 1) \cdot (1, 2)}{5} \bar{n} = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

$$T(\bar{e}_2) = (0, 1) - 2 \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5} \right) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

$$\Rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$



Rotation $\frac{\pi}{4}$ moturs

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Avbildningsmatrisen till T är alltså

$$A = A_2 A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{10} & -\frac{\sqrt{2}}{10} \\ -\frac{\sqrt{2}}{10} & -\frac{7\sqrt{2}}{10} \end{bmatrix}$$