Matematik
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet

Lösningsförslag, tentan 23 april 2014
Matematik del D, tekniskt basår, LMA164D

1.

(a) $D(\cos^4(3x+2)) = 4\cos^3(3x+2)\cdot D(3x+2) = 12\cos^3(3x+2).$

(b)
$$\begin{aligned} D(\sqrt[3]{6x^2+1}) &= D((6x^2+1)^{1/3}) = \frac{1}{3}(6x^2+1)^{-2/3}\cdot D(6x^2+1) \\ &= 4x(6x^2+1)^{-2/3}. \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} D\Big(\frac{\ln(2x)}{x^3}\Big) &= \frac{D\ln(2x)\cdot x^3 - \ln(2x)\cdot D(x^3)}{(x^3)^2} \\ &= \frac{\frac{D(2x)}{2x}\cdot x^3 - \ln(2x)\cdot 3x^2}{x^6} \\ &= \frac{x^2 - 3x^2\ln(2x)}{x^6} = \frac{1-3\ln(2x)}{x^4.} \end{aligned}$$

2. Funktionen är definierad för alla reella x med $x \neq 2$. Beräkna nu första- och andraderivatan av f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(2x-4)-2(x^2+12)}{(2x-4)^2} = \cdots = 2\frac{x^2-4x-12}{(2x-4)^2} \\ &= \cdots = 2\frac{(x+2)(x-6)}{(2x-4)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\frac{(2x-4)(2x-4)^2-(x^2-4x-12)\cdot 4(2x-4)}{(2x-4)^4} \\ &= \cdots = \frac{128}{(2x-4)^3}. \end{aligned}$$

Derivatans nollställen är alltså $x=-2$ och $x=6$ och eftersom $f''(-2) < 0$ och $f''(6) > 0$ har f ett lokalt max då $x=-2$ ($f(-2)=-2$) och ett lokalt min då $x = 6$ ($f(6) = 6$). Vi läser också av att f'' är positiv då $x > 2$ och negativ då $x < 2$, dvs. f är konvex då $x > 2$ och konkav då $x < 2$.

f har en lodrät asymptot då $x = 2$ eftersom

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty.$$

För att hitta eventuella sneda asymptoter räknar vi:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+12}{x(2x-4)} = \frac{1+12/x^2}{2+4/x} \to \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2}, \quad \text{då } x \to \pm\infty,$$

$$f(x) - \frac{x}{2} = \frac{x^2+12}{2x-4} - \frac{x(x-2)}{2(x-2)} = \frac{12+2x}{2x-4} = \frac{2+12/x}{2-4/x} \to 1 \quad \text{då } x \to \pm\infty.$$

Alltså är $y = x/2 + 1$ en sned asymptot både då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$.

För att skissa grafen kan man göra en teckentabell för f'. En sådan visar att f är växande på intervallet $(-\infty, -2)$, avtagande på intervallen $(-2, 2)$ och $(2, 6)$, och växande på intervallet $(6, \infty)$.

3. Derivering med hjälp av kedjeregeln och produktregeln ger

$$3y(x)^2y(x)' \cdot x^2 + y(x)^3 \cdot 2x + y'(x) \cdot (x^4+1) + y(x) \cdot 4x^3 = 5.$$

Sätter vi in $x = 1$ och $y(1) = -2$ får vi att

$$12y'(1) - 16 + 2y'(1) - 8 = 5,$$

vilket ger att $y'(1) = 29/14$. Ekvationen för tangenten i punkten $(1, -2)$ blir därför

$$y + 2 = \frac{29}{14}(x-1),$$

som kan förenklas till $y = 29x/14 - 57/14$.

4.

$$\begin{aligned}
(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{3\tan x + 2x\cos x}{4x} &= \lim_{x\to 0} \frac{3\sin x}{4x\cos x} + \frac{\cos x}{2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3}{4}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{2} \\
&= \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} + \frac{\cos 0}{2} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

(b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{3x}+e^{4x}}{(2e^{2x}+1)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2e^{3x}+e^{4x}}{4e^{4x}+4e^{2x}+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+2e^{-x}}{4+4e^{-2x}+e^{-4x}}$$
$$= \frac{1+2\cdot 0}{4+4\cdot 0+0} = \frac{1}{4}.$$

(c) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3+2x)}{\ln x^2+5\ln x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^3(1+2/x^2)\right)}{2\ln x+5\ln x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3\ln x+\ln(1+2/x^2)}{7\ln x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3+\ln(1+2/x^2)/\ln(x)}{7} = \frac{3+0}{7} = \frac{3}{7}.$$

5. Vi har att
$$f(x) = e^{2x}(x^2-x+\frac{1}{4}) = e^{2x}(x-\frac{1}{2})^2$$
så, eftersom $e^{2x}\neq 0$, har f ett nollställe: $x = 1/2$. Derivering och förenkling ger
$$f'(x) = 2e^{2x}(x-\frac{1}{2})^2 + e^{2x}\cdot 2(x-\frac{1}{2}) = 2e^{2x}(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$$
så f' har två nollställen, $x = 1/2$ och $x = -1/2$. Teckentabell visar att f är växande på intervallet $(-\infty,-1/2)$, avtagande på intervallet $(-1/2,1/2)$ och växande på intervallet $(1/2,\infty)$. Alltså har f ett lokalt max då $x = -1/2$, $f(-1/2) = e^{-1}$, och ett lokalt min då $x = 1/2$, $f(1/2) = 0$.

Lodräta asymptoter saknas. Eftersom
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
har f den horisontella asymptoten $y = 0$ då $x\to-\infty$. Eftersom
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \infty$$
saknas sned asymptot då $x\to\infty$.

Vi beräknar nu andraderivatan av f.
$$\begin{aligned} f''(x) &= D\Big(2e^{2x}(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})\Big) = D\Big(2e^{2x}(x^2-\frac{1}{4})\Big) \\ &= 4e^{2x}(x^2-\frac{1}{4}) + 2e^{2x}\cdot 2x = 4e^{2x}(x^2+x-\frac{1}{4}) \\ &= 4e^{2x}(x-\frac{-1+\sqrt{2}}{2})(x-\frac{-1-\sqrt{2}}{2}). \end{aligned}$$

Andraderivatans nollställen är alltså $x = (-1+\sqrt{2})/2$ och $x = (-1-\sqrt{2})/2$, vilka är x-koordinaterna för de två inflektionspunkterna. Teckentabell för f'' visar att $f''(x) > 0$ i intervallen

$$(-\infty, \frac{-1-\sqrt{2}}{2}) \quad \text{och} \quad (\frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \infty),$$

och att $f''(x) < 0$ i intervallet

$$(\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}).$$

Funktionen f är konvex där $f'' > 0$ och konkav där $f'' < 0$.

6. Vi har $f(x) = 4 - x^2$ så $f'(x) = -2x$. Tangenten i punkten $(a, 4-a^2)$ har lutning $k_T = f'(a) = -2a$ så normalen i punkten $(a, 4-a^2)$ har lutning $k_N = -1/f'(a) = 1/2a$. Ekvationen för normalen i punkten $(a, 4-a^2)$ blir alltså

$$y - (4-a^2) = \frac{1}{2a}(x-a). \qquad (*)$$

Normalens skärning med y-axeln fås genom att sätta $x = 0$ i $(*)$. Det ger $y = -1/2 + 4 - a^2 = 7/2 - a^2$. Normalens skärning med x-axeln fås genom att sätta $y = 0$ i $(*)$. Man får $x = -2a(4-a^2) + a = 2a^3 - 7a$.

(a) Kravet är att normalen skall skära den *negativa* delen av x-axeln och att $a > 0$, dvs. $2a^3 - 7a < 0$ och $a > 0$. Ekvationen $2a^3 - 7a = 0$ har tre lösningar, $a = \pm\sqrt{7/2}$ och $a = 0$, och på intervallet $(0, \sqrt{7/2})$ är $2a^3 - 7a < 0$ och på intervallet $(\sqrt{7/2}, \infty)$ är $2a^3 - 7a > 0$. a kan alltså maximalt vara $\sqrt{7/2}$.

(b) Normalens skärning med x-axeln är $2a^3 - 7a$ (som är negativ) så triangelns bas är blir $7a - 2a^3$. Normalens skärning med y-axeln är $7/2 - a^2$ så triangelns höjd är $7/2 - a^2$. Arean $A(a)$ blir alltså

$$A(a) = \frac{1}{2}(7a - 2a^3)(\frac{7}{2} - a^2) = a(\frac{7}{2} - a^2)^2 = a(a^2 - \frac{7}{2})^2.$$

(c) Vi skall maximera $A(a)$ för a i intervallet $(0, \sqrt{7/2})$. Vi har att

$$A'(a) = (a^2 - \frac{7}{2})^2 + a \cdot 2(a^2 - \frac{7}{2}) \cdot 2a = \cdots = 5(a^2 - \frac{7}{2})(a^2 - \frac{7}{10}).$$

Nollställena till A' är $a = \pm\sqrt{7/10}$ och $a = \pm\sqrt{7/2}$ varav det vara är $\sqrt{7/10}$ som ligger i intervallet vi är intresserade av. Teckentabell visar att A är växande på intervallet $(0, \sqrt{7/10})$ och avtagande på intervallet $(\sqrt{7/10})$ så A har sitt maximum då $a = \sqrt{7/10}$ och detta är

$$A(\sqrt{7/10}) = \sqrt{\frac{7}{10}(\frac{7}{10} - \frac{7}{2})^2} = \sqrt{\frac{7}{10}\frac{196}{25}} \simeq 6.6.$$

7. Se kurslitteraturen.

8. Se kurslitteraturen.