Matematik
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet

Lösningsförslag
Matematik del D, tekniskt basår, LMA164D

1.

$$(i) \quad D(\sqrt{x^3+1}) = \frac{D(x^3+1)}{2\sqrt{x^3+1}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}.$$

$$\begin{aligned}(ii) \quad D(\sin^3(2x)) &= 3\sin^2(2x)\cdot D(\sin(2x)) \\ &= 3\sin^2(2x)\cdot\cos(2x)\cdot D(2x) \\ &= 6\sin^2(2x)\cdot\cos(2x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ii) \quad D(\ln(3x)/x^2) &= \frac{D(\ln(3x))\cdot x^2 - \ln(3x)\cdot D(x^2)}{x^4} \\ &= \frac{\frac{D(3x)}{3x}\cdot x^2 - \ln(3x)\cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln(3x)\cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{1-2\ln(3x)}{x^3}.\end{aligned}$$

2. Vi börjar med att beräkna f' och f''.

$$f'(x) = -e^{-x}(x^2+2x-2)+e^{-x}(2x+2) = -e^{-x}(x^2-4) = -e^{-x}(x-2)(x+2),$$

$$f''(x) = e^{-x}(x^2-4) - e^{-x}\cdot 2x = e^{-x}(x^2-2x-4).$$

Inflektionspunkter beräknas genom att lösa ekvationen $f''(x)=0$. Eftersom $e^{-x}\neq 0$ är denna ekvivalent med $x^2-2x-4=0$ som har lösningarna $x_{1,2} = 1\pm\sqrt{5}$. Dessa är x-koordinaterna för inflektionspunkterna.

För att hitta lokala max och min löser vi $f'(x)=0$. Denna ekvation har lösningarna 2 och -2. Teckenstudium av f' visar att f' är negativ i intervallen $(-\infty,-2)$ och $(2,\infty)$ samt att f' är positiv i intervallet $(-2,2)$. Alltså har f lokalt min då $x=-2$ och lokalt max då $x=2$;

det lokala minimumet är $f(-2) = -2e^2$ och det lokala maximumet är $f(2) = 6e^{-2}$.

Lodräta asymptoter saknas. För att hitta eventuella sneda asymptoter observerar vi först att

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x}(x^2+2x-2) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-2}{e^x} = 0$$

enligt sats om storleksförhållande mellan exponential- och polynomfunktioner. Alltså är $y = 0$ en sned (horisontell) asymptot då $x \to \infty$. Vidare,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}(x+2-\frac{2}{x}) = -\infty$$

så $\lim_{x\to-\infty} f(x)/x$ existerar inte och alltså saknas sned asymptot då $x \to -\infty$.

3. Vi observerar först att punkten $(2,-1)$ ligger på kurvan, dvs. $y(2) = -1$. Derivering av uttrycket

$$y(x)^5 + x^2 y(x)^3 + 2y(x) = x - 9$$

med hjälp av kedjeregeln och produktregeln ger

$$5y(x)^4 \cdot y'(x) + 2xy(x)^3 + x^2 \cdot 3y(x)^2 \cdot y'(x) + 2y'(x) = 1.$$

Sätter vi in $x = 2$ och $y(2) = -1$ får vi

$$5(-1)^4 y'(2) + 4 \cdot (-1)^3 + 12 \cdot (-1)^2 y'(2) + 2y'(2) = 1,$$

dvs. $19y'(2) = 5$. Alltså är $k_T = y'(2) = 5/19$ och ekvationen för tangenten genom punkten $(2,-1)$ är

$$y + 1 = \frac{5}{19}(x-2),$$

som förenklas till $y = 5x/19 - 29/19$.

4.

$$(i) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{4x}{5x} = 1 \cdot \frac{4}{5} = 4/5.$$

$$(ii) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{10}+5e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{x^{10}}{e^x}+5} = \frac{1}{0+5} = 1/5.$$

$$(iii) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + x}{\ln x^3 + 3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}+1}{\frac{3\ln x}{x}+3} = \frac{0+1}{0+3} = 1/3.$$

5. Funktionen är definierad så länge nämnaren är nollskild, dvs. definitionsmängden är $\{x;\, x \neq 3\}$.

   Vi beräknar första- och andraderivatan av f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-1)(x-3)-(x^2-x-5)\cdot 1}{(x-3)^2} = \cdots = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2} \\ &= \frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2}. \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x+8)2(x-3)}{(x-3)^4} = \cdots = \frac{2}{(x-3)^3}.$$

   Vi ser att $f''(x) > 0$ för $x > 3$ och $f''(x) < 0$ för $x < 3$. Alltså är f konvex då $x > 3$, och f är konkav då $x < 3$.

   Lokala extrempunkter söks bland lösningarna till $f'(x) = 0$ som är 2 och 4. Eftersom $f''(2) = -2$ och $f''(4) = 2$ har funktionen ett lokalt max då $x = 2$ och ett lokalt min då $x = 4$.

   Funktionen har eventuellt en vertikal asymptot då $x = 3$. Vi räknar

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = {}'' \frac{1}{0^-} {}'' = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = {}'' \frac{1}{0^+} {}'' = +\infty,$$

   och alltså är $x = 3$ en vertikal asymptot.

   Vi söker nu en sned asymptot då $x \to \infty$ och beräknar

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-5}{x(x-3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-1/x-5/x^2}{1-3/x} = 1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-5-x(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-5}{x-3} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2-5/x}{1-3/x} = 2. \end{aligned}$$

   Alltså är $y = x + 2$ en sned asymptot då $x \to \infty$.

   Väsentligen identiska räkningar visar att $\lim_{x\to-\infty} f(x)/x = 1$ och $\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = 2$, så $y = x + 2$ är en sned asymptot även då $x \to -\infty$.

6. Vi har att $f'(x) = -px^{-p-1}$.

(i) Tangentens lutning ges av $k_T = f'(a) = -pa^{-p-1}$ så tangentens ekvation är

$$y - a^{-p} = -pa^{-p-1}(x - a),$$

som kan förenklas till

$$y = -\frac{p}{a^{p+1}}x + \frac{p+1}{a^p}. \tag{1}$$

(ii) Tangenten bildar tillsammans med koordinataxlarna en rätvinklig triangel; y-koordinaten för tangentens skärning med y-axeln är triangelns höjd h, och x-koordinaten för tangentens skärning med x-axeln är triangelns bas b. För att hitta h sätter vi $x = 0$ i ekvation (1) och får $h = y = (p+1)/a^p$. För att hitta b sätter vi $y = 0$ i ekvation (1), löser ut x och får $b = x = a(p+1)/p$. Triangelns area är alltså

$$A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\frac{a(p+1)}{p}\frac{p+1}{a^p} = \frac{(p+1)^2}{2p}a^{1-p}. \tag{2}$$

(iii) Väljer vi $p = 1$ så ser vi från ekvation (2) att arean blir 2 oberoende av vad a är.

7. Se kurslitteraturen.

8. Se kurslitteraturen.