

Tentamensskrivning i matematik del E 20130520

Kurskod: LMA164

Telefonvakt: Cornelia Jareteg tel. 0734 407926

Tid för tentamen: 08.30-12.30

Hjälpmedel: Inga

1. Beräkna följande integraler.

$$\text{a) } \int x \cos 2x \, dx. \quad \text{b) } \int \frac{1}{x^2 + 7x + 12} \, dx. \quad \text{c) } \int \sin^3 x \, dx \quad (10\text{p})$$

2. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = 3 - x$ och $y = \frac{2}{x}$. Rita figur! (4p)

3. Lös differentialekvationen $x^2 y' = y + 1$ med lösningsmetoden för separabla differentialekvationer. (4p)

4. Visa med induktion att $\sum_{k=0}^n 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$, $n \geq 0$. (5p)

5. Beräkna volymen av den rotations kropp som uppstår då kurvan $y = \sin x \sqrt{\cos x}$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, får rotera kring x -axeln. (4p)

6. Lös begynnelsevärdesproblemet
$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \quad (5\text{p})$$

7. En tank innehåller från början 1000 liter rent vatten. Vid en viss tidpunkt börjar man pumpa in saltvatten i tanken med hastigheten 10 liter per minut. Samtidigt töms tanken på sin saltlösning i samma takt, så den totala mängden saltlösning i tanken är hela tiden 1000 liter. Antag att koncentrationen salt i inflödet är 35 gram per liter och att saltlösningen i tanken blandas så effektivt att koncentrationen salt, vid varje tidpunkt, är densamma överallt i tanken. Din uppgift är att bestämma en funktion som beskriver hur mängden salt i tanken varierar med tiden. Efter lång tid kommer saltkoncentrationen i tanken att vara ungefär densamma som i inflödet. Kontrollera att detta stämmer med din funktion. (6p)

8. Härled lösningsformeln till en linjär differentialekvation av första ordningen d.v.s. en DE av typen $y' + f(x)y = g(x)$. (4p)

9. Formulera och bevisa formeln för en aritmetisk summa. (4p)

10. Bevisa integreringsregeln $\int f(x)g(x) \, dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) \, dx$. (4p)