Tentamensskrivning i matematik del E 20130520

Kurskod: LMA164
Telefonvakt: Cornelia Jareteg tel. 0734 407926
Tid för tentamen: 08.30-12.30
Hjälpmedel: Inga

---

1. Beräkna följande integraler.

a) $\int x \cos 2x \; dx.$ b) $\int \frac{1}{x^2+7x+12} \; dx.$ c) $\int \sin^3 x \; dx$ (10p)

Lösning:

a)

$$\int x \cos 2x \; dx = \{\mathrm{PI}\} = x \; \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} dx = x \; \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

b)

$$\int \frac{1}{x^2+7x+12} \; dx = \int (\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4}) \; dx = \int (\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}) \; dx = \ln|x+3| - \ln|x+4| + C.$$

c)

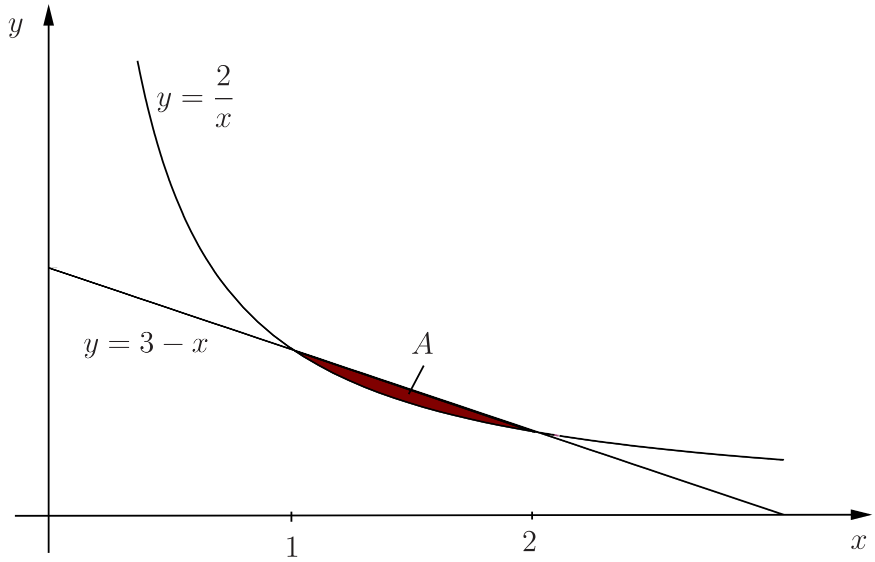
$$\int \sin x(1-\cos^2 x) \; dx = \left\{ \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} = -\int (1-t^2) \; dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

2. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = 3 - x$ och $y = \frac{2}{x}$. Rita figur! (4p)

Lösning:

Vi beräknar först skärningspunkterna mellan kurvorna d.v.s. löser ekvationen $3 - x = \frac{2}{x}$ som har lösningarna $x_1 = 1$ och $x_2 = 2$.

Området vi ska beräkna arean av blir då enligt figuren nedan



$$A = \int_1^2 ((3-x) - \frac{2}{x})\ dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} - 2\ln x\right]_1^2 = (\frac{3}{2} - 2\ln 2) \text{ a.e..}$$

3. Lös differentialekvationen $x^2y' = y + 1$ med lösningsmetoden för separabla differentialekvationer. (4p)

Lösning:

$$x^2y' = y + 1 \underbrace{\Leftrightarrow}_{y\neq -1} \frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x^2} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x^2} \Leftrightarrow \ln|y+1| = \frac{-1}{x} + C_1$$

$$|y+1| = e^{-1/x + C_1} \Leftrightarrow y + 1 = \underbrace{\pm e_1^C}_{C_2} e^{-1/x},\ C_2 \neq 0 \Leftrightarrow y = C_2e^{-1/x} - 1$$

Vi undersöker nu om $y = -1$ är en lösning till differentialekvationen och finner att så är fallet. Sammanfattningsvis får vi då

$$y = Ce^{-1/x} - 1.$$

4. Visa med induktion att $\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{2},\ n \geq 0.$ (5p)

Lösning:

Låt $U(n)$ vara utsagan $\sum_{k=0}^{n} 3^k = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}, \ n \geq 0.$

I(induktionsstarten): Visa $U(0)$ sann.

$VL_0 = \sum_{k=0}^{0} 3^k = 3^0 = 1$ och $HL_0 = \dfrac{3^1-1}{2} = 1$. Ok!

II(induktionsantagandet): Antag $U(p)$ sann för något $p \geq 0$.

$$\sum_{k=0}^{p} 3^k = \frac{3^{p+1}-1}{2}$$

III: Visa att $U(p)$ sann $\Rightarrow U(p+1)$ sann.

$$\sum_{k=0}^{p+1} 3^k = \frac{3^{p+2}-1}{2}$$

$$\begin{aligned} VL_{p+1} &= \sum_{k=0}^{p+1} 3^k = \sum_{k=0}^{p} 3^k + 3^{p+1} = (\text{ind.ant.}) = \frac{3^{p+1}-1}{2} + 3^{p+1} \\ &= \frac{3^{p+1}-1+2\cdot 3^{p+1}}{2} = \frac{3\cdot 3^{p+1}-1}{2} \\ &= \frac{3^{p+2}-1}{2} = HL_{p+1}. \end{aligned}$$

Slutsats: Enligt induktionsprincipen följer att $U(n)$ är sann för alla $n \geq 0$.

5. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då kurvan $y = \sin x\sqrt{\cos x}, \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, får rotera kring $x-$ axeln. (4p)

Lösning:

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, \cos x \, dx = \left[\begin{array}{c|c} \sin x = t & x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \\ \cos x \, dx = dt & x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right] = \pi \int_0^1 t^2 \, dt \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

6. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'' + 2y' + 5y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= -1 \end{cases}$ (5p)

Lösning:

Vi löser den karakteristiska ekvationen $r^2 + 2r + 5 = 0$ till differentialekvationen och får lösningarna $r = -1 \pm 2j$. Den allmänna lösningen blir då

$$y(x) = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

$y(0) = 1$ ger

$$e^0(A\cos 0 + B\sin 0) = 1 \Leftrightarrow A = 1.$$

För att kunna använda oss av att $y'(0) = -1$ deriverar vi först $y(x)$(med $A = 1$) och får

$$y'(x) = -e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + e^{-x}(-2\sin 2x + 2B\cos 2x).$$

$y'(0) = -1$ ger $B = 0$ och vi får då lösninskurvan

$$y = e^{-x}\cos 2x.$$

7. En tank innehåller från början 1000 liter rent vatten. Vid en viss tidpunkt börjar man pumpa in saltvatten i tanken med hastigheten 10 liter per minut. Samtidigt töms tanken på sin saltlösning i samma takt, så den totala mängden saltlösning i tanken är hela tiden 1000 liter. Antag att koncentrationen salt i inflödet är 35 gram per liter och att saltlösningen i tanken blandas så effektivt att koncentrationen salt, vid varje tidpunkt, är densamma överallt i tanken. Din uppgift är att bestämma en funktion som beskriver hur mängden salt i tanken varierar med tiden. Efter lång tid kommer saltkoncentrationen i tanken att vara ungefär densamma som i inflödet. Kontrollera att detta stämmer med din funktion. (6p)

Lösning:

Om $y(t)$ är mängden salt i tanken (mätt i gram) vid tiden t så får vi att;

$$y'(t) = \overbrace{\underbrace{35}_{\text{konc.}} \cdot \underbrace{10}_{\text{hast.}}}^{\text{inflöde}} - \overbrace{\underbrace{\frac{y}{1000}}_{\text{konc.}} \cdot \underbrace{10}_{\text{hast.}}}^{\text{utflöde}}$$

dvs. differentialekvationen $y' + \dfrac{1}{100}y = 350$. Multiplicerar vi båda led i denna ekvation med den integrerande faktorn $e^{\int \frac{1}{100}\,dt} = e^{t/100}$ så får vi;

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t/100}y\right) = 350e^{t/100} \;\Leftrightarrow\; e^{t/100}y = 35000e^{t/100} + C \;\Leftrightarrow\; y = 35000 + Ce^{-t/100}$$

Eftersom $y(0) = 0$ så följer att $C = -35000$, vilket ger oss att;

$$y(t) = 35000(1 - e^{-t/100})$$

Vi noterar speciellt att;

$$\frac{y(t)}{1000} = 35(1 - e^{-t/100}) \to 35 \quad , \quad t \to \infty$$

så koncentrationen salt i tanken efter lång tid kommer vara ca. 35 gram per liter, vilket översenstämmer med koncentrationen i inflödet.

8. Härled lösningsformeln till en linjär differentialekvation av första ordningen d.v.s. en DE av typen $y' + f(x)y = g(x)$. (4p)

9. Formulera och bevisa formeln för en aritmetisk summa. (4p)

10. Bevisa integreringsregeln $\displaystyle\int f(x)g(x)\;dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\;dx.$ (4p)