Tentamensskrivning i matematik del E 20120521

Kurskod: LMA164
Examinator: Jonny Lindström tel. 0733 607040
Tid för tentamen: 08.30-12.30
Hjälpmedel: Inga

---

1. Beräkna följande integraler.

a) $\displaystyle\int xe^{2x}\ dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x^2+3x+2}\ dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx$ (10p)

Lösning:

a) $\displaystyle\int xe^{2x}\ dx = PI = x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$

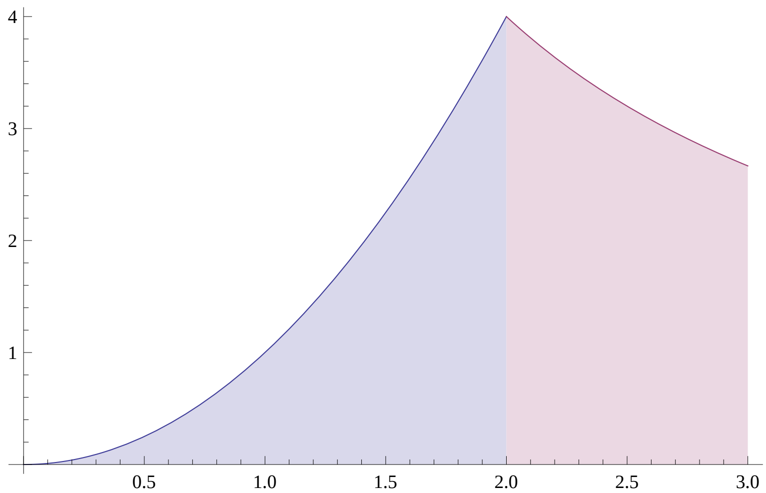
b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x^2+3x+2}\ dx = PBU = \int_1^2 (\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1})dx = [2\ln(x+2) - \ln(x+1)]_1^2 = 5\ln 2 - 3\ln 3$

c) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx = \{t=\sqrt{x},\ dx = 2t\,dt\} = \int\ 2\sin t\,dt = -2\cos t + +C = 2 - 2\cos\sqrt{x} + C$

2. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = \dfrac{8}{x}$, $x-$ axeln samt linjen $x = 3$. Rita figur! (5p)

Lösning:

En skiss över området som ska beräknas är enligt följande figur:



Vi får dela upp beräkningarna enligt

$$A = \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^3 \frac{8}{x}\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + [8\ln x]_2^3 = \frac{8}{3} + 8\ln\frac{3}{2}.$$

3. Då dagsljuset tränger ner i en sjö avtar ljusets intensitet $I(x)$ med djupet x under vattenytan enligt Lamberts lag:

$$\frac{dI}{dx} = -kI$$

där k är en positiv konstant. Bestäm funktionen $I(x)$ om ljusintensiteten är $I(0) = I_0$ vid ytan och $I(1) = 0.4I_0$ på 1 meters djup. (5p)

Lösning:

Vi skriver (DE) som

$$I' + kI = 0$$

och löser den som en linjär (DE) av första ordningen. I.F $e^{F(x)} = e^{kx}$. multiplicerar vi båda leden med e^{kx} får vi

$$I'e^{kx} + ke^{kx}I = 0 \Leftrightarrow (Ie^{kx})' = 0$$

Integrering av båda leden ger

$$Ie^{kx} = C \Leftrightarrow I(x) = Ce^{-kx}.$$

Vi har att $I(0) = I_0$ vilket ger oss $C = I_0$ och vi får då

$$I(x) = I_0e^{-kx}.$$

På 1 meters djup har vi att $I(1) = 0.4I_0$ vilket efter insättning ger oss

$$I_0e^{-k\cdot 1} = 0.4I_0 \Leftrightarrow e^{-k} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow k = -\ln\frac{2}{5}.$$

Sökt funktion blir då

$$I(x) = I_0e^{\ln\frac{2}{5}t} = I_0(\frac{2}{5})^x.$$

4. Visa med induktion att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \geq 1$. (5p)

Lösning:

Låt $U(n)$ vara utsagan $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \geq 1$.

I(induktionsstarten): Visa $U(1)$ sann.

$VL_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1$ och $HL_1 = \dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1$. Ok!

II(induktionsantagandet): Antag $U(p)$ sann för något $p \geq 1$.

$$\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

III: Visa att $U(p)$ sann $\Rightarrow U(p+1)$ sann.

$$\sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

$$\begin{aligned} VL_{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \sum_{k=1}^{p} k^2 + (p+1)^2 = (\text{ind.ant.}) = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 \\ &= \frac{p(p+1)(2p+1) + 6(p+1)^2}{6} = \frac{(p+1)(p(2p+1) + 6(p+1))}{6} = \frac{(p+1)(2p^2+7p+6)}{6} \\ &= \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6} = HL_{p+1}. \end{aligned}$$

Slutsats: Enligt induktionsprincipen följer att $U(n)$ är sann för alla $n \geq 1$.

5. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} 2xyy' = 1 + y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ (5p)

Lösning:

Separabel diff.ekv. och vi får då

$$\int \frac{2y}{1+y^2}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx \Leftrightarrow \ln(1+y^2) = \ln x + C$$

$y(1) = 1$ ger $C = \ln 2$. Vi får då $\ln(1+y^2) = \ln x + \ln 2 = \ln(2x)$. Löser vi ut y ur ekvationen får vi att

$$y = \sqrt{2x-1}.$$

6. Lös differentialekvationen $y''' + y' = x + 2$. (6p)

Lösning:

Karr.ekv. $p(r) = r^3 + r = 0$ har lösningarna $r_1 = 0,\ r_2 = j,\ r_3 = -j$. Den allmänna homogena lösningen blir då

$$y_h = C + A\cos x + B\sin x.$$

För partikulärlösningen ansätter vi ett polynom av grad 2.

$$y_p = ax^2 + bx + c$$

vilket ger

$$y_p' = 2ax + b,\ y_p'' = 2a,\ y_p''' = 0$$

Insättning i (DE) ger oss att $a = 1/2$ och $b = 2$. c väljes godyckligt till 0. vi får då att

$$y_p = \frac{1}{2}x^2 + 2x.$$

Sammanfattningsvis får vi

$$y = C + A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}x + 2x.$$

7. I en viss bakteriepopulation ändras antalet bakterier med en hastighet som är proportionell mot antalet bakterier. Man vet att vid tiden noll är antalet bakterier 1000 stycken och att efter 6 timmar har antalet bakterier fördubblats. Hur många bakterier finns det efter ett dygn? (6p)

Lösning:

Sätt $N(t) =$ antalet bakterier vid tiden t timmar. $\dfrac{dN}{dt}$ blir då antalet bakterier per timme. Vi får då följande differentialekvationen att lösa:

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

som har den allmänna lösningen

$$N(t) = Ce^{kt}.$$

Vi har att $N(0) = 1000$ vilket ger $C = 1000$ och vi får då

$$N(t) = 1000e^{kt}.$$

Vi har även att enligt texten att $N(6) = 2000$ vilket ger oss att $k = \dfrac{\ln 2}{6}$ och funktionen blir då

$$N(t) = 1000e^{\frac{\ln 2}{6}t}.$$

Antalet bakterier efter 24 timmar blir

$$N(24) = 1000e^{\frac{\ln 2}{6}24} = 1000e^{4\ln 2} = 1000e^{\ln 16} = 1000 \cdot 16 = 16000.$$

8. Härled lösningsformeln till en linjär differentialekvation av första ordningen d.v.s. en DE av typen $y' + f(x)y = g(x)$. (4p)

9. Formulera och bevisa formeln för en geometrisk summa. (4p)