

# Tentamensskrivning i matematik del E 20120604

Kurskod: LMA164

Examinator: Jonny Lindström tel. 0733 607040

Tid för tentamen: 08.30-12.30

Hjälpmedel: Inga

---

1. Beräkna följande integraler.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{1}{x^2 + x} dx & \text{b) } \int_1^{\sqrt{2}} x(1 + x^2) dx & \text{c) } \int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx \end{array} \quad (10\text{p})$$

**Lösning:**

a)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + x} dx &= \int \frac{1}{x(x+1)} dx = PBU = \int \left( \frac{A}{x} + \frac{b}{x+1} \right) dx = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \ln x - \ln(x+1) + C = \ln \frac{x}{x+1} + C \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int_1^{\sqrt{2}} x(1 + x^2) dx = \left[ \begin{array}{l|l} 1 + x^2 = t & x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ 2x dx = dt & x = \sqrt{2} \Rightarrow t = 3 \end{array} \right] = \int_2^3 \frac{1}{2} t dt = \left[ \frac{t^2}{4} \right]_2^3 = \frac{9}{4} - \frac{4}{4} = \frac{5}{4}.$$

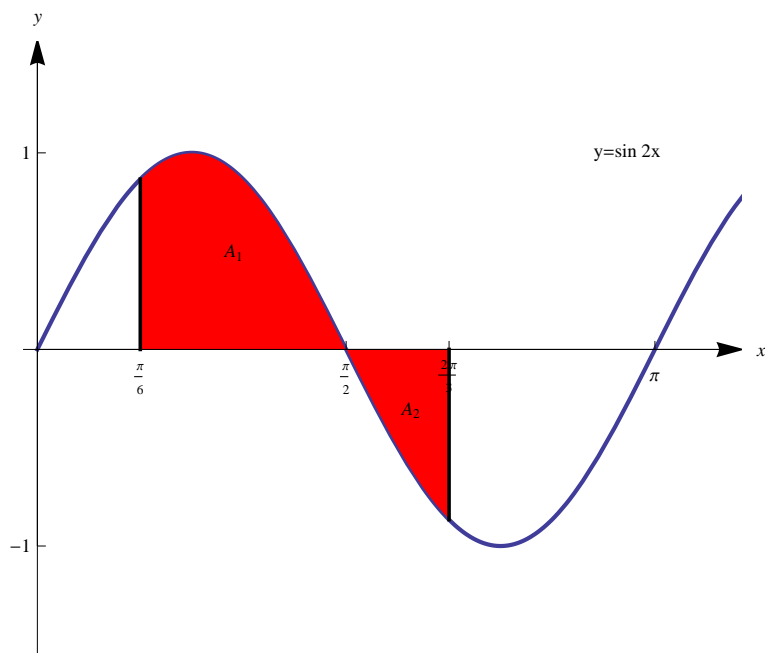
c)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx &= \{t = \cos x, dt = -\sin x dx\} = - \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = -\arctan t + C \\ &= -\arctan(\cos x) + C \end{aligned}$$

2. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan  $y = \sin 2x$ , positiva  $x$ -axeln och de vertikala linjerna  $x = \frac{\pi}{6}$  och  $x = \frac{2\pi}{3}$ . Rita figur! (5p)

**Lösning:**

En skiss över området som ska beräknas är enligt följande figur:



Vi får dela upp beräkningarna enligt

$$\begin{aligned}
 A = A_1 + A_2 &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin(2x) \, dx + \left(0 - \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \sin(2x) \, dx\right) = \left[\frac{-\cos(2x)}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/2} - \left[\frac{-\cos(2x)}{2}\right]_{\pi/2}^{2\pi/3} \\
 &= -\left(\frac{\cos \pi}{2} - \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{2}\right) + \frac{\cos \frac{4\pi}{3}}{2} - \frac{\cos \pi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1
 \end{aligned}$$

3. Antalet insekter  $P$  i en insektspopulation tillväxer enligt differentialekvationen

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

där  $t$  är tiden i dygn och  $k$  är en positiv konstant. Bestäm funktionen  $P(t)$  om man vet att antalet insekter vid tiden  $t = 0$  är 250 och att efter 2 dygn är antalet 1000. (5p)

**Lösning:**

Vi skriver (DE) som

$$P' - kP = 0$$

och löser den som en linjär (DE) av första ordningen. I.F  $e^{F(t)} = e^{-kt}$ . multiplicerar vi båda leden med  $e^{-kt}$  får vi

$$P'e^{-kt} - ke^{-kt}P = 0 \Leftrightarrow (Pe^{-kt})' = 0$$

Integrering av båda leden ger

$$Pe^{-kt} = C \Leftrightarrow P(t) = Ce^{kt}.$$

Vi har att  $P(0) = 250$  vilket ger oss  $C = 250$  och vi får då

$$P(t) = 250e^{kt}.$$

Efter 2 dygn har vi att  $P(2) = 1000$  vilket efter insättning ger oss

$$250e^{k \cdot 2} = 1000 \Leftrightarrow e^{2k} = 4 \Leftrightarrow k = \frac{2 \ln 2}{2} = \ln 2.$$

Sökt funktion blir då

$$P(t) = 250(e^{\ln 2})^t = 250 \cdot 2^t.$$

4. Visa med induktion att  $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$ ,  $n \geq 1$ . (5p)

**Lösning:**

Låt  $U(n)$  vara utsagan  $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$ ,  $n \geq 1$ .

**I**(induktionsstarten): Visa  $U(1)$  sann.

$$VL_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1 \text{ och } HL_1 = \frac{1(3 \cdot 1 - 1)}{2} = 1. \text{ Ok!}$$

**II**(induktionsantagandet): Antag  $U(p)$  sann för något  $p \geq 1$ .

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3p - 2) = \frac{p(3p - 1)}{2}$$

**III**: Visa att  $U(p)$  sann  $\Rightarrow U(p + 1)$  sann.

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3p - 2) + (3p + 1) = \frac{(p + 1)(3p + 2)}{2}$$

$$\begin{aligned} VL_{p+1} &= 1 + 4 + 7 + \dots + (3p - 2) + (3p + 1) = (\text{ind.ant.}) = \frac{p(3p - 1)}{2} + (3p + 1) \\ &= \frac{p(3p - 1) + 2(3p + 1)}{2} = \frac{3p^2 + 5p + 2}{2} = \frac{(p + 1)(3p + 2)}{2} \\ &= HL_{p+1}. \end{aligned}$$

**Slutsats:** Enligt induktionsprincipen följer att  $U(n)$  är sann för alla  $n \geq 1$ .

5. Lös differentialekvationen  $y'' - y' - 2y = 2x^2 + 2x + 4$ . (6p)

**Lösning:**

Karr.ekv.  $r^2 - r - 2 = 0$  har lösningarna  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = 2$ . Den allmänna homogena lösningen blir då

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

För partikulärlösningen ansätter vi ett polynom av grad 2.

$$y_p = ax^2 + bx + c$$

vilket ger

$$y'_p = 2ax + b, \quad y''_p = 2a$$

Insättning i (DE) ger oss att  $a = -1$  och  $b = 0$  och  $c = -3$ . Vi får då att

$$y_p = -x^2 - 3.$$

Sammanfattningsvis får vi

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - x^2 - 3.$$

6. Lös begynnelsevärdesproblemet  $\begin{cases} y' = (y^2 - 1)x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$  (5p)

**Lösning:**

Separabel diff.ekv. och vi får då

$$\int \frac{1}{y^2 - 1} dy = \int x^2 dx.$$

Vi har att

$$\frac{1}{y^2 - 1} = [PBU] = \frac{A}{y + 1} + \frac{B}{y - 1} = \frac{1/2}{y - 1} - \frac{1/2}{y + 1}$$

och får då

$$\int \frac{1}{2} \left( \frac{1}{y - 1} - \frac{1}{y + 1} \right) dy = \int x^2 dx$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}(\ln|y-1| - \ln|y+1|) = \frac{x^3}{3} + C_1$$

$\Leftrightarrow$

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{2}{3}x^3 + C_2$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{y-1}{y+1} = C e^{\frac{2}{3}x^3}$$

som har lösningen

$$y(x) = \frac{1 + C e^{\frac{2}{3}x^3}}{1 - C e^{\frac{2}{3}x^3}}$$

Bivillkoret  $y(0) = 2$  ger  $C = \frac{1}{3}$  och vi får slutligen att

$$y(x) = \frac{3 + e^{\frac{2}{3}x^3}}{3 - e^{\frac{2}{3}x^3}}$$

7. I ett nyvädrat rum med volymen  $120 \text{ m}^3$  börjar några personer att röka. Röken sprider sig i en takt av  $0.01 \text{ m}^3/\text{min}$  och den välblandade röklufsen lämnar rummet i samma takt och ersätts med ren luft genom ventilation med samma takt  $0.01 \text{ m}^3/\text{min}$ . Röken innehåller 4% av den hälsovådliga gasen  $CO$ . Bestäm halten av gasen  $CO$  som funktion av tiden. Efter hur lång tid nås det hälsovådliga värdet 0.012%?

(4p)

**Lösning:**

Låt  $y(t)$  vara koncentrationen (i procent) koloxid ( $CO$ ) i rummet  $t \text{ min}$  efter det att personerna börjat röka. Vi vet då att  $y(0) = 0$ . Förändringshastigheten för  $y(t)$  (dvs. derivatan) är differensen mellan tillskott och bortfall.

Tillskottet från rökandet är  $\frac{0.01 \cdot 0.04}{120}$  procentenheter per minut, och

bortfallet p.g.a. ventilation är  $\frac{0.01 y(t)}{120}$  procentenheter per minut.

Detta ger oss begynnelsevärdesproblemet;

$$y'(t) = \frac{0.01 \cdot 0.04}{120} - \frac{0.01 y(t)}{120}, \quad y(0) = 0$$

Differentialekvationen är linjär och kan skrivas;

$$y'(t) + \frac{1}{12000}y(t) = \frac{0.04}{12000} \quad (DE)$$

Den integrerande faktorn är  $e^{\int \frac{1}{12000} dt} = e^{\frac{t}{12000}}$  så ;

$$(DE) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( e^{\frac{t}{12000}} y(t) \right) = \frac{0.04}{12000} e^{\frac{t}{12000}} \Leftrightarrow \\ e^{\frac{t}{12000}} y(t) = 0.04 e^{\frac{t}{12000}} + C \Leftrightarrow y(t) = 0.04 + C e^{-\frac{t}{12000}}$$

Begynnelsevillkoret  $y(0) = 0$  ger sedan att  $C = -0.04$  så

$$y(t) = 0.04(1 - e^{-\frac{t}{12000}})$$

Vi vill nu också bestämma den tidpunkt  $T$  för vilket koloxidhalten  $y(t)$  nått den farliga nivån 0.00012;

$$0.04(1 - e^{-\frac{T}{12000}}) = 0.00012 \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{T}{12000}} = 0.003 \Leftrightarrow \\ e^{-\frac{T}{12000}} = 0.997 \Leftrightarrow T = -12000 \ln 0.997$$

**Svar:** Halten koloxid  $t$  minuter efter det att personerna börjat röka är  $0.04(1 - e^{-\frac{t}{12000}})$  och efter  $-12000 \ln 0.997$  ( $\approx 36$ ) minuter så har halten nått den hälsovådliga nivån.

8. Bevisa areaformeln,  $A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ . (4p)

9. Formulera och bevisa formeln för en aritmetisk summa. (4p)