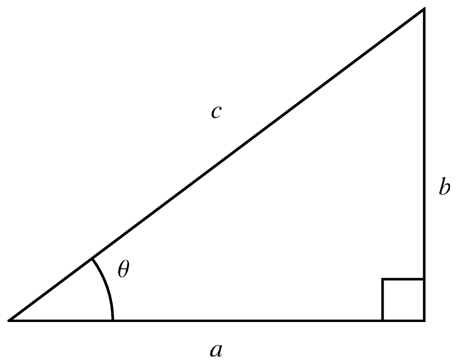
Föreläsningar kapitel 6

Trigonometri. Några samband



Teorem 1 *(Pytagoras sats) För en rätvinklig, som i figuren, gäller*

$$a \perp b \Longrightarrow a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

Kommentarer Kommentar: Pytagoreiska (heltals)tripplar genereras av

$$a = x^2 - y^2, \quad b = 2xy, \quad c = x^2 + y^2 .$$

Exempel 6.1 Givet talen $x = 5$ och $y = 2$. Detta ger $a = 21$, $b = 20$ och (alltså) $c = 29$, d.v.s.

$$21^2 + 20^2 = 441 + 400 = 841 = 29^2 .$$

■

Samband för *komplementvinkel*: Man ser att $\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$ och $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$. Ex.vis Givet $\theta = 34^\circ$. Dess *komplementvinkel* är $90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$. Några samband mellan de trigonometriska funktionerna.

Exempel 6.2 Givet en rätvinklig triangel med hypotenusa 10 och en katet 5. Beräkna

(a) den andra katetens längd och

(b) de trigonometriska funktionernas värde för vinkeln mellan dessa sidor.

Lösning:

(a) Den andra katetens längd är

$$b := \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{2^2 - 1^2} = 5\sqrt{3} .$$

(b) de trigonometriska funktionernas värden för vinkeln θ mellan de två kända sidorna är

$$\cos\theta = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan\theta = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}, \text{ och } \cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

■

Kommentarer

- I exempel 6.2 är vinkeln är $\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$.
- Vi kan beräkna de exakta trigonometriska värdena för vinklarna 45°, 30° och 60° m.h.a. en rätvinklig respektive en liksidig triangel.

Enhetscirkeln

Exempel 6.3 Givet $\theta = 34^\circ$. Dess *komplementvinkel* är $90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$. Dess *supplementvinkel* är $180^\circ - 34^\circ = 146^\circ$.

■

Exempel 6.4 Givet att $\sin v = \frac{2}{3}$ för vinkeln v i andra kvadrant. Beräkna cos, tan, och cot för v.

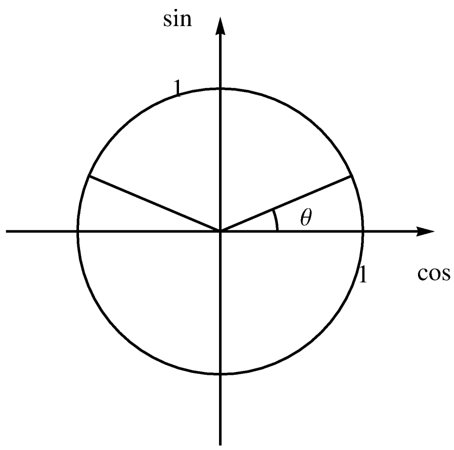
Lösning: Sätt en hypotenusan $c = 3$ och motstående katet $b = 2$. Närliggande katet är då $\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

$$\cos v = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \tan v = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cot v = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

■

Samband mellan grader och radianer. x i grader är $x \cdot \frac{\pi}{180}$ i radianer, ex.vis $30^\circ = 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$. Vi kan göra en tabell.

x i grader	360°	180°	90°	45°	30°
x i radianer	2π	π	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/6$



- *Radianer är längden av cirkelbågen, med tecken, för motsvarande vinkel i grader i enhetcirkeln.*
- Samband för supplementvinkel: Man ser att $\sin\theta = \sin(\pi-\theta)$ och $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$. Vinkeln $\pi-\theta$ är trubbig i figuren. Cosinusvärdet är < 0 för trubbig vinkel medan sinusvärdet > 0.
- M.h.a. enhetcirkeln ser vi att $\cos x$ och $\sin x$ har perioden $T = 2\pi$ eller $T = 360^\circ$. $\tan x$ och $\cot x$ har perioden $T = \pi$ eller $T = 180^\circ$.

Exempel 6.5 Lös ekvationen $\cos 2x = 1/2$ i grader och radianer.

Lösning:

$$\begin{aligned} 2x &= 60^\circ + n\cdot 360^\circ \text{ eller } 2x = -60^\circ + n\cdot 360^\circ \Longrightarrow \\ x &= 30^\circ + n\cdot 180^\circ \text{ eller } x = -30^\circ + n\cdot 180^\circ, \quad n\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

I radianer blir

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + n\cdot\pi, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

■

Exempel 6.6 Lös ekvationen $1-\tan(x-\pi/3) = 0$.

Lösning:

$... \Leftrightarrow \tan(x/2-\pi/3) = 1 \Leftrightarrow x/2-\pi/3 = \pi/4+n\pi \Leftrightarrow x = n\cdot 2\pi + 7\pi/6, \quad n\in\mathbb{Z}.$

■

Ekvationer av typ $\sin = \cos$

Exempel 6.7 Lös ekvationen $\cos(\pi/3+2x) = \sin x$.

Lösning: Förvandla sin till cos (eller vice versa).
Detta ger

$$\cos(\pi/3+2x) = \cos(\pi/2-x) \Leftrightarrow \pi/3+2x = \pi/2-x+2n\pi \text{ eller } \pi/3+2x = -(\pi/2-x)+2n\pi,$$

som ger

$$x = \frac{1}{18}\pi(12n+1) \text{ eller } x = \frac{1}{6}\pi(12n-5), \quad n \text{ heltal}.$$

■

Additionsformler

M.h.a. en "dubbeltriangel" kan man härleda additionsformler för cos, och sin och därefter för tan. Bl.a. är

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

och

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

Ur den senare får man sinus för dubbla vinkeln genom att sätta $\beta=\alpha$. Ur additionsformeln

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

får man

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha\,.$$

Kommentarer

- För linjens ekvation $y=kx+m$ och α vinkeln mellan positiva $x-$axeln och linjen (räknad positiv vid vridning moturs.), gäller att $k=\tan\alpha$.
- Detta samband kan användas att beräkna strålgången i ett spegelteleskop eller mer allmänt, en reflekterad linjes riktningskoefficient.

Exempel 6.8 Bestäm det exakta värdet av $\cos 15^\circ \equiv \cos(\pi/12)$.

Lösning: Vi får från cosinus för dubbla vinkeln med $2\alpha=\pi/6$ att

$$\cos\alpha=\cos(\pi/12)=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

men kan dettt uttryck förenklas? Vi löser problemet på ett annat sätt:

$$\cos(\pi/12)=\cos(\pi/4-\pi/6)=\cos(\pi/4)\cdot\cos(\pi/6)+\sin(\pi/4)\cdot\sin(\pi/6)=\ldots$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot 1}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\,.$$

Dessa två uttryck är alltså lika!

■