

Lösningarna skall vara utförligt gjorda. Svaren skall vara exakta och vara förenklade så långt som möjligt!

1. Givet vektorerna  $\mathbf{a} = (3, 5, 8)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2, 1)$ .
  - (a) Bestäm exakt vinkeln mellan  $\mathbf{a}$  och  $\mathbf{b}$ .
  - (b) Beräkna  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .2.0p
2. Givet matriserna  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$  och  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \end{bmatrix}$  med reella element.
  - (a) Beräkna den matrisprodukt  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  eller  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  som är möjlig.
  - (b) Beräkna  $\det \mathbf{A}$ .
  - (c) Antag att  $\det \mathbf{A} \neq 0$ . Skriv upp inversmatrisen till  $\mathbf{A}$  uttryckt med elementen i  $\mathbf{A}$ .5.0p
3. Antag att  $\mathbf{a}$  och  $\mathbf{b}$  är två vektorer i  $\mathbb{R}^3$ .
  - (a) Förenkla
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2.$$
  - (b) Förenkla
$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$
  - (c) Förenkla  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ .5.0p
4. Antag att matrisen  $\mathbf{A}$  är kvadratisk och förutsätt att lämpliga matriser i (a) och (b) nedan är inverterbara.
  - (a) Lös ut  $\mathbf{X}$  i matrisekvationen  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{X}$ .
  - (b) Visa att  $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$4.0p
5. Givet fyra olika punkter  $P, Q, R$  och  $S$  i  $\mathbb{R}^3$ , som inte ligger i samma plan.
  - (a) Skriv upp en ekvation för linjen som innehåller punkterna  $P$  och  $Q$ , på valfri form. 2.0p
  - (b) Förklara hur arean av triangeln med hörn i  $P, Q$  och  $R$ , kan beräknas med vektorprodukt. Ge ett uttryck för arean uttryckt med dessa tre punkter. 2.0p
  - (c) De fyra punkterna är hörn i en tetraeder. Vad är tetraederns volym uttryckt med i punkterna? 2.0p
6. Antag att  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  och  $\mathbf{C}$  är tre matriser med typ  $\mathbf{A} = 3 \times 4$ , typ  $\mathbf{B} = 3 \times 5$  och typ  $\mathbf{C} = 5 \times 2$   
Ange de matrismultiplikationer nedan är möjliga, och deras typer.  
3 p om alla svar är riktiga, 1.5 p om precis tre svar är riktiga.
  - (a)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$  (b)  $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}$  (c)  $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}^T$  (d)  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T$3.0p