Dugga vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212 0104, för DI1 och EI1, tisdag e.m. 20171219

Examinator Reimond Emanuelsson, tel 031 772 5892, 0708 948456.
Tentarond: Hossein Raufi, tel 031-772 5315
Maximal poäng 25.0
Inga hjälpmedel!

1. Följande linjära ekvationssystem, ES, är på matrisform.
   Ange rang på koefficient- och totalmatris, samt antal lösningar till respektive ES.

   (a) (b) (c)

   $$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   3.0 p om alla svar är riktiga, 1.5 p, om det finns precis ett fel, 0.0 p för fler fel. 3.0p

2. Givet vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ i $\mathbb{R}^3$.
   (a) Förenkla $||\boldsymbol{u}||^2 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}$.
   (b) Förenkla $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}$.
   (c) Förenkla $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$.
   (d) Antag att $||\boldsymbol{u}|| = 3$ och $||\boldsymbol{v}|| = 4$ samt $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = -6$. Beräkna vinkeln mellan vektorerna.
   (e) Beräkna $||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}||$ med $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ som i (d).

   5.0p

3. Matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$ är given.
   (a) Beräkna $\det \boldsymbol{A}$. 2.0p
   (b) Ge ekvivalenta villkor på elementen i $\boldsymbol{A}$ för att $\det \boldsymbol{A} = 0$. 2.0p

4. Antag att lämpliga matriser i (a) och (b) är inverterbara.
   (a) Lös ut $\boldsymbol{X}$ i matrisekvationen $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = 2\,\boldsymbol{X}$. 1.5p
   (b) I matrisekvationen i (a) har $\boldsymbol{X}$ två rader och $\boldsymbol{A}$ har 4 kolonner. Bestäm typerna för de tre matriserna i (a). 1.5p
   (c) Visa att $\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}) \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$. Visa att HL är både vänster- och högerinvers.

   1.5p

5. Vilka samband gäller (d.v.s. är identiteter), för alla vektorer $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ i $\mathbb{R}^3$? Skriv S för de som är identiteter och F för de som inte är det. 2.0 poäng om alla svar är riktiga och 1 poäng för 1 fel.

(a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$	(b) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b})$	(c) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$
(d) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$	(e) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a}$	(f) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

   2.0 p

6. (a) Givet matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
   Beräkna $\det \boldsymbol{A}$, ange ett ekvivalent villkor för att $\boldsymbol{A}^{-1}$ existerar och ange $\boldsymbol{A}^{-1}$ under detta villkor. 3.0p
   (b) Antag att $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ bar typ $m \times n$ respektive $n \times p$. Visa att $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T$. 3.5p

Lycka till!