September 13, 2014

Lösning av Lay: 1.5 övning 25

Givet en matris $\boldsymbol{A}$ av typ $m \times n$ och två matriser $\boldsymbol{C}$ och $\boldsymbol{D}$, sådana att $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$ respektive $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}_m$. Visa att $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$ och att $m = n$.

Bevis: Vi ser att $\boldsymbol{C}$ är *vänsterinvers* och $\boldsymbol{D}$ är *högerinvers*. Vi bevisar nu att dessa är lika:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{I}_m = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D}) = \{\text{Assoc. lagen för multipl.}\} = (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}_n \cdot \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}\,.$$

Nu till bevis av att $m = n$. Knepet är att den homogena matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ å ena sidan endast har lösningen $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$.
Bevis: Det består av två delar. Dessa steg motsäger varandra.
I

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{0} \text{ d.v.s. } \boldsymbol{I}_n \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}\,.$$

Den *enda* lösningen som $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ kan ha är alltså $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ (och $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ *är* dessutom en riktig lösning).
II
Om $m < n$, d.v.s. om $\boldsymbol{A}$ har fler rader än kolonner, kommer ES $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ på matrisform ge att

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{0}] \sim [\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{0}]$$

med $\boldsymbol{A}'$ på radreducerad form. Eftersom $m < n$ kommer vi ha minst en fri variabel och därmed oändligt med lösningar. Detta är en motsägelse mot **I** och alltså är $m \geq n$.
För att visa att olikheten $n < m$ inte är möjligt, betraktar vi matrisekvationen $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$. Vi transponerar den

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{X}^T = \boldsymbol{0}^T = \boldsymbol{0}\,.$$

Vi observerar att typ $\boldsymbol{A}^T = n \times m$ och $n < m$ leder, p.s.s., till en motsägelse. Alltså är $m = n$, vilket avslutar beviset.

∎

Kommentarer

- Att visa att $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$ är detsamma som att visa att vänster- och högerinvers är lika ($\boldsymbol{A}_L^{-1} = \boldsymbol{A}_R^{-1}$) och är relativt lätt.
- Den andra delen att visa att $m = n$, d.v.s. att samtliga tre matriser är kvadratiska, är dock lite av överkurs.