Lösningsförslag till Tentamen vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212, för DAI och EI, måndag e.m. 20140825
Ansvarig lärare: Reimond Emanuelsson

1. Beräkna $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$ och $\arg z$ för $z = \dfrac{7+9j}{1-8j}$...

$$z = \frac{7+9j}{1-8j} \cdot \frac{1+8j}{1+8j} = \frac{-65+65j}{65} = -1+j$$

så att

$$\mathrm{Im}\, z = 1, \quad |z| = \sqrt{2}, \quad \arg z = \frac{3\pi}{4}\,.$$

2p

2. ES på matrisform

   (a) Lös ekvationssystemet... 1.5p

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right] \sim ... \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right], \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

   (b) $\det \boldsymbol{A} = 1\,.$ 2p

   (c) Talet a ger matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -a \\ a & -3 & a \\ a & -2 & c \end{bmatrix}$:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2-a & 2-2a & 2a-2 \\ 3a-3 & 4a-3 & 3-3a \\ 2a-2 & 2a-2 & 2-a \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = 1$$

2p

3. Givet ekvationssystemet...

   (a) Som matrisekvation:

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ 2x+y &= 3 \\ 3x+y &= 0 \\ 4x+y &= 11 \end{cases} \iff \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} =: \boldsymbol{B} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{B} \text{ d.v.s. } \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 14 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 7 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 25 \\ 7 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

3.0p

   (b) Medelfelet

$$\nu = \frac{\left|\boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} - \boldsymbol{B}\right|}{\sqrt{4}} = \frac{6}{2} = 3\,.$$

1.5p

4. Följande punkter, i ett ONH-system, är givna.

$$P = (1;2;2),\ Q = (3;0;4),\ R = (2;2;3),\ \text{ och } S = (1;2;8)\,.$$

   (a) En ekvation för planet Π, som innehåller punkterna P, Q och R: Normalvektor

$$\boldsymbol{n} \parallel \pm\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-2,0,2)$$

   så att $\boldsymbol{n} = (1,0,-1)$. Planets ekv. är

$$\boldsymbol{n} \cdot ((x,y,z) - \overrightarrow{OP}) = x - z + 1 = 0\,.$$

2.5p

   (b) Vi behöver $\overrightarrow{PS} = (0,0,6)$ Volymen V på tetraedern med hörn i de fyra punkterna är

$$V = \frac{|2\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{PS}|}{6} = \frac{|(1,0,-1)\cdot(0,0,6)|}{6} = 1 \text{ v.e.}$$

1.0p

(c) Avståndet d mellan planet Π och punkten S är

$$d = \frac{|1-8+1|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \text{ l.e.}$$

3.0p

5. Betrakta binomet $f(z) := 8z^2 + j$.

(a) Lös den binomiska ekvationen

$f(z) = 0 \Longleftrightarrow 8z^2 = -j$ och polära koord. $2^3 r^2 e^{2j\,\theta} = -j = e^{j(3\pi/2+2n\pi)}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Detta ger två ekvationer

$$\begin{cases} r^2 = 1/8 \text{ och} \\ 2\theta = 3\pi/2 + 2n\pi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} r = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ \theta = \dfrac{3\pi}{4} + n\pi, \quad n = 0, 1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{j}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{4}(1-j) \\ z_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{j}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{4}(-1+j) \end{cases}$$

2.0p

(b) Skriv polynomet $f(z)$ som en produkt av två komplexa polynom...

$$8z^2 + j = 8\left(z - \frac{1}{4}(1-j)\right)\left(z + \frac{1}{4}(1-j)\right) = \frac{1}{2}(4z-1+j)(4z+1-j)$$

1.5p

6. Polynomet $g(z) = 2z^3 + 7z^2 + 10z + 6$ har ett komplext nollställe $z_1 = a + aj$ och p.g.a. reella koeff. även $z_2 = a - aj$. Således är

$$g(z) = 2z^3+7z^2+10z+6 = (z^2+2za+2a^2)(2z+b) = 2a^2b+2a(2a+b)z+(4a+b)z^2+2z^3 .$$

Detta ger

$$\begin{cases} 7 = 4a + b \\ 5 = a(a+b) \\ 6 = 2a^2 b \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ eller } a = \frac{5}{2}.$$

Man ser att $a = 1$ och $b = 3$ är den enda lösningen. Ekvationen $g(z) = 0$ har rötterna $z_{1,2} = 1 \pm j$ och $z_3 = -3/2$.

$$g(z) = (z^2 + 2z + 2)(2z + 3)$$

som en produkt av två reella polynom av så låg grad som möjligt. 5.0p