# Lösningsförslag till Tentamen i Linjär algebra för DAI1 och EI1, LMA 212 , 20141030 f.m.

1. (Givet det komplexa talet $z = \dfrac{j-5}{3+2j}$.) Beräkna...

   (a)
$$|z| = \frac{|-5+j|}{|3+2j|} = \sqrt{\frac{1^2+5^2}{3^2+2^2}} = \sqrt{2}\,.$$

   (b)
$$z = \frac{j-5}{3+2j} \cdot \frac{3-2j}{3-2j} = \frac{-13+13j}{13} = -1+j \Rightarrow \operatorname{Im} z = 1\,.$$

   (c)
$$\arg z = \pi - \arctan(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\,.$$

2.0 p

2. (Följande ekvationsssystem är givet)

   (a) Lös ekvationssystemet...
$$\begin{cases} x+y-2z &= 1 \\ x-y-3z &= -6 \\ -x+2y+4z &= 10 \end{cases} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -6 \\ -1 & 2 & 4 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & 11 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$
   Vi har alltså lösningen $(x, y, z) = (0, 3, 1)$. 1.5 p

   (b) Determinanten av koefficientmatrisen: 2.0 p
$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (-4+3) = -1\,.$$

   (c)
$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a+3 & a+2 & -2a-4 \\ a+2 & -a-1 & -3a-6 \\ a+2 & -2a-4 & -4a-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow a = -2$$
   **B** är invers matris till koeffiicentmatrisen i (a), omm $a = -2$. 2.0 p

3. (Följande punkter i $\mathbb{R}^3$ är givna.)
$$P = (1,2,3)\,, \quad Q = (3,1,1)\,, \quad R = (1,4,5)\,, \quad S = (3,4,7)\,.$$
   Sätt $\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{u} = (2,-1,-2)$, $\overrightarrow{PR} = \boldsymbol{v} = (0,2,2)$, $\overrightarrow{PS} = \boldsymbol{w} = (2,2,4)$.

   (a) Vinkeln $\theta$ mellan $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{PQ}$ och $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PR}$:
$$\cos\theta = \frac{(2,-1,-2)\cdot(0,1,1)}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}} = \frac{-3}{3\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Longleftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} (= 135^\circ)\,.$$
   2.0 p

   (b) En ekvation för planet som innehåller punkterna $P$, $Q$ och $R$. Normalvektor är $\boldsymbol{n} := \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}/2 = (1,-2,2)$. Planets ekvation är alltså
$$\boldsymbol{n} \cdot ((x,y,z) - \overrightarrow{OP}) = (1,-2,-1)\cdot(x,y,z) - (1,2,3)) = x - 2y + 2z - 3 = 0\,.$$
   2.5 p

   (c) Arean av triangeln med hörn i $P$, $Q$ och $R$ är
$$T = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2}}{2} = \frac{2}{2} \cdot \sqrt{9} = 3 \text{ a.e.}$$
   1.5 p

   (d) Avståndet $d$ mellan planet i (b) och punkten $S$ är lika med höjden $h$ i tetraedern med hörn i $P$, $Q$, $R$ och $S$. Sätt $\boldsymbol{w} := \overrightarrow{PS} = (2,2,4)$. Tetraederns volym är
$$\frac{|(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}|}{6} = \frac{|(2,-4,4)\cdot(2,2,4)|}{6} = \frac{12}{6} = 2 = \frac{T\cdot h}{3} = \frac{3h}{3} \Longleftrightarrow d \equiv h = 2\,.$$
   2.5 p

4. (Följande ekvationer är ekvationer för två plan i $\mathbb{R}^3$.)

   (a) Vi löser detta ES.
$$\begin{array}{rcr} x-y+z &=& 0 \\ x-2y+z &=& -1 \end{array} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases} x = 1 - z = 1 - t \\ y = 1 \\ z = z = t \end{cases} \quad \text{eller } \boldsymbol{r} = (x,y,z) = t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r}_0 = t(-1,0,1) + (1,1,0), \quad t \in \mathbb{R}\,.$$
   1.0 p

(b) En ekvation för planet som är vinkelrät mot dessa två plan har normalvektor lika med riktningsvektorn i (a), d.v.s. $\boldsymbol{n} = (-1, 0, 1)$. Planets ekvation är alltså $(-1, 0, 1) \cdot ((z, y, z) - (0, 0, 0)) = z - x = 0$. 1.5 p

5. (a) Vi vet att $a$, $b$, $c$ och $d$ är reella och att $f(z) = 0$.

$$\begin{aligned} f(\overline{z}) &= a\overline{z}^3 + b\overline{z}^2 + c\overline{z} + d = \overline{a}\,\overline{z^3} + \overline{b}\,\overline{z^2} + \overline{c}\,\overline{z} + \overline{d} = \\ &= \overline{az^3} + \overline{bz^2} + \overline{cz} + \overline{d} = \overline{az^3 + bz^2 + cz + d} = \\ &= \overline{0} = 0 \text{ d.v.s. } f(\overline{z}) = 0 \text{ V.S.B.}\,. \end{aligned}$$

2.5 p

(b) (Polynomet $f(z) = 2z^3 + z^2 - 18z - 35$ har ett icke-reellt nollställe med realdel $-2$.) För att lösa ekvationen $f(z) = 0$, sätter vi två nollställen till $z_{1,2} = -2 \pm j\,a$ och därmed är

$$f(z) = 2z^3 + z^2 - 18z - 35 = (2z + b)(z + 2 - ja)(z + 2 - ja) = (2z + b)(z^2 + 4z + 4 + a^2)$$

Vi jämför koefficienter i VL och HL:

$$\begin{array}{rrcl} & \text{VL} & & \text{HL} \\ \hline z^3: & 2 & = & 2 \\ z^2: & 1 & = & b + 8 \\ z^1: & -18 & = & 8 + 2a^2 + 4b \\ z^0: & -35 & = & b\,(4 + a^2) \end{array} \iff \begin{cases} b = -7 \\ a = \pm 1 \end{cases} .$$

Alltså är

$$f(z) = (2z - 7)(z^2 + 4z + 5) = 0 \iff \begin{cases} z = 7/2 \\ z = -2 \pm j \end{cases}$$

3.0 p

6. Lösning av ekvationen $z^3 + 64j = 0$:

$$z^3 + 64j = 0 \iff z^3 = -64j\,. \quad z^3 = r^3 e^{3j\alpha} = 64 e^{3\pi\,j/2} \iff \begin{cases} r^3 = 64 \\ 3\alpha = 3\pi/2 + 2\pi\,n,\; n \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} r = 4 \\ \alpha = \pi/2 + 2\pi\,n/3 \end{cases} .$$

Med $n = -1, 0, 1$ får vi

$$\begin{array}{lll} n = -1: & \alpha_1 = -\pi/6, & z_1 = 4 \cdot e^{-\pi\,j/6} = 4(\sqrt{3}/2 - j/2) = 2\sqrt{3} - 2j \\ n = 0: & \alpha_2 = \pi/2 & z_2 = 4 \cdot e^{\pi\,j/2} = 4j \\ n = 1: & \alpha_3 = 7\pi/6 & z_3 = 4 \cdot e^{7\pi\,j/6} = 4(-\sqrt{3}/2 - j/2) = -2\sqrt{3} - 2j \end{array}$$

3.0 p