Lösningsförslag till Tentamen vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212, för DAI och EI, fredag e.m. 20150102

1.
$$z = \frac{4+j}{3+5j} = \frac{4+j}{3+5j}\cdot\frac{3-5j}{3-5j} = \frac{17-17j}{34} = \frac{1}{2}(1-j)\,.$$
$$\operatorname{Im} z = -1/2, \quad |z| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ och } \arg z = -\frac{\pi}{4}$$
2.0p

2. Betrakta ekvationssystemet...

   (a) Lösning av ekvationssystemet:
$$\begin{cases} x-y+z &= -2 \\ x-y+2z &= -1 \\ 5x-3y+11z &= 2 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 11 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \iff \begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}.$$
1.5p

   (b) Beräkning determinanten av koefficientmatrisen $\boldsymbol{A} = -2$ i (a). 1.5p

   (c) Produkten
$$\frac{1}{k}\cdot\begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \\ -k & k & 0 \end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \iff k = 2\,.$$
1.0p

3. Givet ekvationssystemet...
$$\begin{cases} x-y &= 1 \\ -2x+y &= -4 \\ x+2y &= 7 \end{cases} \text{ med koeff. matris } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ och HL } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

   (a) Bästa (approximativa) lösningen i Minsta kvadratmetodens mening:
$$\boldsymbol{A}^T\cdot\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{A}^T\cdot\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 16 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\boldsymbol{A}^T\cdot\boldsymbol{A})^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^T\cdot\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$
2.0p

   (b) Medelfelet: Vi ser att
$$\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{B}$$
   d.v.s. $\hat{\boldsymbol{X}}$ *är* lösning till det ursprungliga ES. Alltså är medelfelet $= 0$. 1.5p

   (c)
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A_v^{-1}\cdot\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$
1.0p

4. Följande punkter, i ett ON-system, är givna.
$$P = (1;-4;1),\ Q = (4;1;9),\ R = (3;6;-6), \text{ och } S = (1;0;-1)\,.$$

   (a) Vinkeln θ mellan $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$:
$$\boldsymbol{a} := \overrightarrow{PQ} = (3,5,8) \text{ och } \boldsymbol{b} := \overrightarrow{PR} = (2,10,-7) \Rightarrow \cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = 0 \iff \theta = 90^\circ\,.$$
2.5p

   (b) Arean på triangeln med hörn i P, Q och R är
$$T = \frac{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|\sin 90^\circ}{2} = \frac{\sqrt{98}\cdot\sqrt{153}}{2} = \frac{7\sqrt{2}\cdot 3\cdot\sqrt{17}}{2} = \frac{21\sqrt{34}}{2}$$
1.5p

   (c) En ekvation för planet Π, som innehåller punkterna P, R och S:
$$\boldsymbol{c} := \overrightarrow{PS} = (0,4,-2) \text{ och } \boldsymbol{b} := \overrightarrow{PR} = (2,10,-7) \Rightarrow \boldsymbol{n} = (0,2,-1)\times(2,10,-7) = (-4,-2,-4)\,.$$
   Vi väljer normalvektorn $\boldsymbol{n} = (2,1,2)$, så att en ekvation för planet är
$$\boldsymbol{n}\cdot((x,y,z) - \overrightarrow{OP}) = (2,1,2)\cdot((x,y,z)-(1,-4,1)) = 2x+y+2z = 0$$

   (d) Volymen av tetraedern med hörn i punkterna P, Q, R och S ges av
$$V = \frac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|}{6} = \frac{|(3,5,8)\cdot(8,4,8)|}{6} = \frac{108}{6} = 18$$
1.5p

5. Binomet $f(z) := z^2 + 2j$.

(a) Den binomiska ekvationen

$$f(z) = z^2 + 2j = 0 \Longleftrightarrow z^2 = -2j \Longleftrightarrow r^2 e^{2j\theta} = 2e^{-\pi/2+2n\pi} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\theta = -\pi/2 + 2n\pi \\ r^2 = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \theta = -\pi/4 + n\pi \\ r = \sqrt{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt{2}(1/\sqrt{2} - j/\sqrt{2}) = 1 - j \\ z_2 = -\sqrt{2}(1/\sqrt{2} + j/\sqrt{2}) = -1 + j \end{cases}$$

2.0p

(b) Polynomet $f(z) = (z - 1 + j)(z + 1 - j)$ som en produkt av två komplexa polynom. 2.0p

6. Faktoruppdela polynomet $g(z) = 3z^3+8z^2+10z+4$... Sätt ett nolställe till $z_1 = a+j$ och således ett annat nollställe till $z_2 = a - j$, där a reellt. .

$$3z_1^3 + 8z_1^2 + 10z_1 + 4 - (3z_2^3 + 8z_2^2 + 10z_2 + 4) = 2i\left(9a^2 + 16a + 7\right) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$a^2 + \frac{16}{9}a + \frac{7}{9} = 0 \Longleftrightarrow a = -\frac{8}{9} \pm \sqrt{\frac{64}{81} - \frac{7}{9}} = -\frac{8}{9} \pm \sqrt{\frac{64}{81} - \frac{63}{81}} = \frac{-8 \pm 1}{9} = \begin{cases} -7/9 \\ -1 \end{cases}.$$

$a = -1$ ger polynomet $(z + 1 - j)(z + 1 + j) = z^2 + 2z + 2$ som faktor till $g(z)$ och multiplikationen

$$g(z) = 3z^3 + 8z^2 + 10z + 4 = (z^2 + 2z + 2)(3z + 2)\,.$$

Eftersom den sista likheten är en idantitet behöver det andra värdet, $a = -7/9$, inte kontrolleras. 4.5p