Lösningsförslag till Tentamen i Linjär algebra, LMA212 för DAI1 och DEI1, 20161027,08.30-12.30

tel 031 772 5881/0708 948 456

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare

Program	DAI, EI	Kurs	LMA 212 0204
Tentamensdatum	20161027	Tid	14.00-18.00

1. Låt $z = \dfrac{1+9j}{4-5j}$.

   (a) Förenkla ...

$$z = \frac{1+9j}{4-5j} \cdot \frac{4+5j}{4+5j} = \frac{-41+41j}{41} = -1+j.$$

   (b)$|z|\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. (c) $\operatorname{Im} z01$. (d) $\arg z = 3\pi/4$. 2.0p

2. Givet matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) $|\boldsymbol{A}| = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. (b) Matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ på matrisform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim ... \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \text{ d.v.s. } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1.5p+1.5p

   (c) Talet b, så att

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} b & 0 & b \\ -b & 1 & -3 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \boldsymbol{I}_3 \Longleftrightarrow b = 1.$$

1.5p

3. Givet matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$...

   (a) Visa att matrisekvationen saknar lösning $\boldsymbol{x}$...

$$\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim ... \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   där tredje raden säger att $0 = 1$, en omöjlighet. 0.5p

   (b) Lösning med MK-metodenoch (b) beräkna medelfelet.

$$\boldsymbol{A}^t \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 15 \end{bmatrix} \Longrightarrow (\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Således är den bästa lösningen och medelfelet

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ resp. } \eta = \frac{||-\boldsymbol{b}||}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

2.5p

   (c) Visa att matrisen 1.0p

$$\boldsymbol{A}_L^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = ... = \boldsymbol{I}_2.$$

   d.v.s. $\boldsymbol{A}_L^{-1}$ är vänsterinvers.

$$\boldsymbol{A}_L^{-1} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{x}}.$$

   Vi får alltså samma lösning som med MK-metoden. 1.0p

4. Givet punkterna $P = (3;2;8)$, $Q = (2;1;5)$ och $R = (2;2;6)$.

   (a) Arean T av triangeln med hörn i P, Q och R är

$$T = \frac{\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

2.0p

   (b) En ekvation för planet Π, som innehåller punkterna P, Q och R:

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2,1,-1).$$

   Pi:s ekvation: $\boldsymbol{n} \cdot ((x,y,z) - \overrightarrow{OP}) = 2x + y - z = 0$. 2.0p

5. Givet ekvationen för planet $\Pi : 2x + y - z = 0$ och linjen L med ekvationen $\begin{cases} x &= t \\ y &= 2t \\ z &= 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

   (a) Visa att linjen L ligger i planet Π. 1.5p

   (b) Bestäm en ekvation för det plan Π_1, som innehåller linjen L och är vinkelrät mot planet Π. 2.5p

6. Givet punkterna $O = (0; 0; 0)$, $P_1 = (-6; 9; 2)$, $P_2 = (6; 2; 9)$ och $P_3 = (7; 6; -6)$.

   (a) Visa att sträckorna OP_1, OP_2 och OP_3 är parvis vinkelräta och lika långa. 2.0p

   (b) Punkterna utgör hörnen i en kub (enligt a)). Bestäm koordinaterna för kubens övriga hörn. 3.0p

   Ledning till uppgiften: Använd vektorer för att lösa uppgiften.

7. Polynomet $g(z) = z^3 + 3\sqrt{2}z^2 + 8z + 4\sqrt{2}$ har ett nollställe $z_1 = a + aj.$, där $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Lös ekvationen $g(z) = 0$. 2.5p

   (b) Faktorisera $g(z)$ i reella polynom av så låg grad som möjligt. 1.0p