Lösningsförslag till Tentamen i Linjär algebra, 3.7p, LMA212 för DAI1 och DEI1, 20161222, 14.00-18.00

tel 031 772 5881/0708 948 456. Lärare: Reimond Emanuelsson

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare

1. (a)

$$z = \frac{7+3j}{2j-5} = \frac{(7+3j)(-2j-5)}{29} = \frac{-29-29j}{29} = -1-j$$

(b) $|z| = \sqrt{2}$. (c) $\operatorname{Im} z = -1$. (d) $\arg z - 3\pi/4$. 2.0p

2. Givet matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) $\det \boldsymbol{A} = -2$.

(c) Bestäm talet b, sådan att

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{b}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & b+1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{b-2}{b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{b} \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} \Longleftrightarrow b = 2.$$

1.5p

(b) Lösning av matrisekvationen

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.0p+1.5p

3. Givet matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, där $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Matrisekvationen saknar lösning $\boldsymbol{x}$ eftersom matrisformen

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

0.5p

(b) Lös matrisekvationen med MK-metoden...

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \quad = \quad \boldsymbol{b} \Longrightarrow \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{b} :$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{x}}$$

2.5p

(c) Medelfelet är

$$\frac{||\boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}||}{\sqrt{4}} = \frac{||\,(-1,1,-1,1)\,||}{2} = 1$$

1.0p

(d) Matrisen $\boldsymbol{A}_L^{-1}$ är vänsterinvers ty

$$\boldsymbol{A}_L^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning av matrisekvationen m.h.a. $\boldsymbol{A}_L^{-1}$:

$$\boldsymbol{A}_L^{-1} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

1.0p

4. Givet punkterna $P = (4; 2; 1)$, $Q = (2; 1; -1)$ och $R = (0; -1; -1)$.

(a) Arean av triangeln T med hörn i P, Q och R. Bilda

$$\overrightarrow{PQ} = (-2,-1,-2),\ \overrightarrow{PR} = (-4,-3,-2),\ \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-4,4,2), \quad \boldsymbol{n} = (-2,2,1)$$

Triangelns area är $T = \dfrac{2\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}}{2} = 3$ a.e. 2.0p

(b) En ekvation för planet Π, som innehåller punkterna P, Q och R är

$$\boldsymbol{n} \cdot ((x,y,z) - (0,-1,-1) = (-2,2,,1) \cdot ((x,y,z) + (0,1,1)) = -2x + 2y + z + 3 = 0$$

2.0p

5. Givet ekvationen för planet $\Pi :\ 3 - 2x + 2y + z = 0$ och linjen L med ekvationen $\begin{cases} x &= 3t+1 \\ y &= 2t \\ z &= 2t-1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Visa att linjen L ligger i planet Π:

$$3 - 2x + 2y + z = 3 - 2(3t + 1) + 2 \cdot 2t + 2t - 1 = 0.$$

1.5p

(b) Bestäm en ekvation för det plan Π_1, som innehåller linjen L och är vinkelrät mot planet Π: Sätt $\boldsymbol{v} = (3, 2, 2)$, linjens riktningsvektor. Normalvektor för detta plan Π_1 är $\boldsymbol{n}_1 = n \times \boldsymbol{v} = (2, 7, -10)$. En punkt I planet är $1; 0; -1$, så att Π_1:s ekvation är

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot ((x, y, z) - (1, 0, -1)) = 2x + 7y - 10z - 12 = 0.$$

2.5p

6.
Givet punkterna $P_1 = (3; 4)$, $P_2 = (5; 9)$ och $P_3 = (8; 2)$ är givna

(a) $\overrightarrow{P_1P_2} = (2, 5)$ och $\overrightarrow{P_1P_3} = (5, -2)$ har skaläprodutken $2 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) = 0$ och är alltså vinkelräta. 2.0p

(b) Kvadratens fjärde hörn:

$$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_1P_3} = (10, 7)$$

så att den fjärde punktens koordinater är $P_4 := (10; 7)$. 2.0p

7. Polynomet $f(z) = 2z^3 + 13z^2 + 42z + 18$ har ett nollställe $z_1 = a + a\,j$., där $a \in \mathbb{R}$ är ett heltal...

(a) Sätt $z = a + a\,j$. Då är

$$f(a + a\,j) = -4a^3 + 42a + 18 + (4a^3 + 26a^2 + 42a)j = 0.$$

Imaginärdelen har nollställen $a = 0$, $a = -7/2$ och $a = -3$. Endast $a = -3$ är ett heltal som måste vara $\neq 0$. Alltså är$z_{1,2} = -3 \pm 3\,j$, som ger faktorn

$$(z + 3 + 3j)(z + 3 - 3j) = z^2 + 6z + 18.$$

"Snabb polynomdivision" ger $f(z) = (z^2+6z+18)(2z+1)$. Nollställen är $z_{1,2} = -3 \pm 3\,j$ och $z = -1/2$.

3.0p

(b) Faktorisering av $f(z)$ i reella polynom är $f(z) = (z^2 + 6z + 18)(2z + 1)$. 1.0p