Lösningsförslag till Tentamen i Linjär algebra, LMA212 för DI1 och EI1

20171026, kl.08.30-12.30

1. Låt $z = \dfrac{5+7j}{6+j}$.

   (a) Förenkla z. (b) Bestäm $|z|$. (c) Bestäm $\operatorname{Im} z$. (d) Bestäm $\arg z$. (2p)

   Lösning: (a) $z = \dfrac{5+7j}{6+j} = \dfrac{(5+7j)(6-j)}{(6+j)(6-j)} = \dfrac{37+37j}{37} = 1+j$

   (b) $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ (c) $\operatorname{Im} z = 1$ (d) $\arg z = \frac{\pi}{4}$

2. Givet matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Beräkna determinanten av $\boldsymbol{A}$. (1p)

   Lösning: $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$

   (b) För vilka reella tal k och m är $\boldsymbol{B} = k \cdot \begin{bmatrix} m & -5 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ inversmatris till $\boldsymbol{A}$. (1p)

   Lösning: $k \cdot \begin{bmatrix} m & -5 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} m-2 & m-4 & 3m-12 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

   Här blir vänsterledet enhetsmatrisen endast om $k = 1/2$ och $m = 4$.

   (c) Lös matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. (2p)

   Lösning: $A \cdot \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{X} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

   Från lösningen av deluppgift (b) följer därför att;

   $\boldsymbol{X} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -16 \\ -14 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}$

3. Givet matrisekvationen $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, där $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Visa att matrisekvationen saknar lösning $\boldsymbol{x}$. (1p)

   Lösning:

$$[A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

   där fjärde raden säger att $0 = 1$, vilket är en omöjlighet.

   (b) Lös ekvationen approximativt med Minsta Kvadratmetoden. (3p)

   Lösning: Minstkvadratlösningen fås som lösning till det felutjämnade systemet $A^T A\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$ dvs.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   (c) Beräkna medelfelet för lösningen i (b). (1p)

   Lösning: Medelfelet i minstakvaratlösningen från deluppgift (b) är;

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{4}} || \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} || = \frac{1}{2} || \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} || = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. Givet punkterna $P = (1; 4; 2)$, $Q = (2; 2; 1)$ och $R = (1; 1; -1)$.

   (a) Bestäm arean T av triangeln med hörn i P, Q och R. (2p)

   Lösning: Vi har;

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = (3, 3, -3)$$

   så arean av triangeln är

$$T = \frac{||\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}||}{2} = \frac{||(3, 3, -3)||}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

   (b) Bestäm en ekvation för planet Π, som innehåller punkterna P, Q och R. (2p)

   Lösning: Vektorn $\mathbf{n} = (1, 1, -1)$ är parallell med vektorn $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ och därmed också en normalvektor till planet Π. Så planet kan beskrivas med ekvationen;

$$\mathbf{n} \cdot ((x, y, z) - \overrightarrow{OP}) = 0 \;\Leftrightarrow\; (1, 1, -1) \cdot (x-1, y-4, z-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x-1+y-4-(z-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x+y-z-3 = 0$$

5. Givet planet $\Pi : 2x - y + z = 0$ och linjen $L : \begin{cases} x & = 2t \\ y & = 3t \\ z & = -t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$.

   (a) Visa att linjen L ligger i planet Π. (1p)

   Lösning: Alla punkter på formen $(2t, 3t, -t)$ ligger i planet $2x - y + z = 0$ ty

$$2(2t) - (3t) + (-t) = 0$$

   (b) Bestäm en ekvation för det plan Π_1 som innehåller linjen L och är vinkelrät mot planet Π. (3p)

   Lösning: En normalvektor till det sökta planet skall vara vinkelrät mot både linjens riktningsvektor $\mathbf{v} = (2, 3, -1)$ och normalvektorn $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$ till planet Π. En sådan vektor finner vi genom att beräkna deras vektorprodukt;

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -4, -8)$$

   Så $\mathbf{n}_1 = (1, -2, -4)$ är en normalvektor till planet Π_1. Origo ligger på linjen L och därmed också i planet Π_1 så planet Π_1 kan beskrivas med ekvationen;

$$\mathbf{n} \cdot (x, y, z) = 0 \;\Leftrightarrow\; (1, -2, -4) \cdot (x, y, z) = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 2y - 4z = 0$$

6. Givet punkterna $O = (0; 0; 0)$, $P_1 = (-6; 9; 2)$, $P_2 = (6; 2; 9)$ och $P_3 = (7; 6; -6)$.

   (a) Visa att sträckorna OP_1, OP_2 och OP_3 är parvis vinkelräta och lika långa. (2p)

   Lösning: Detta följer om vi kan visa att vektorerna $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$ och $\overrightarrow{OP_3}$ är vinkelräta och lika långa. Två vektorer är vinkelräta om deras skalärprodukt är 0. Vi får;

$$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = (-6, 9, 2) \cdot (6, 2, 9) = 0$$
$$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_3} = (-6, 9, 2) \cdot (7, 6, -6) = 0$$
$$\overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3} = (6, 2, 9) \cdot (7, 6, -6) = 0$$

   och

$$||\overrightarrow{OP_1}|| = \sqrt{6^2 + 9^2 + 2^2} = \sqrt{121} = 11$$
$$||\overrightarrow{OP_2}|| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 9^2} = \sqrt{121} = 11$$
$$||\overrightarrow{OP_3}|| = \sqrt{7^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{121} = 11$$

   (b) Punkterna utgör hörnen i en kub (enligt a)). Bestäm koordinaterna för kubens övriga hörn. (2p)

   Lösning: Om kubens övriga hörn betecknas P_4, P_5, P_6 och P_7 så får vi;

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_4} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} &= (0, 11, 11) &&\Rightarrow P_4 = (0; 11; 11) \\ \overrightarrow{OP_5} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_3} &= (1, 15, -4) &&\Rightarrow P_5 = (1; 15; -4) \\ \overrightarrow{OP_6} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} &= (13, 8, 3) &&\Rightarrow P_4 = (13; 8; 3) \\ \overrightarrow{OP_7} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + +\overrightarrow{OP_3} &= (7, 17, 5) &&\Rightarrow P_7 = (7; 17; 5) \end{aligned}$$

7. Polynomet $g(z) = 3z^3 + 8z^2 + 10z + 4$ har ett nollställe med imaginärdelen 1.

(a) Lös ekvationen $g(z) = 0$. (3p)

Lösning: Ett nollställe till $g(z)$ är alltså på formen $a + j$. Vi har;

$$g(a + j) = 3(a^3 + 3a^2j - 3a - j) + 8(a^2 + 2aj - 1) + 10(a + j) + 4 = 0$$

Genom att identifiera real- och imaginärdel i denna likhet får vi;

$$\begin{cases} 3a^3 + 8a^2 + a - 4 = 0 \\ 9a^2 + 16a + 7 = 0 \end{cases}$$

Lösningarna till den andra av dessa ekvationer är $a = -1$ och $a = -7/9$, men $a = -7/9$ uppfyller inte den första ekvationen. Så vi måste ha $a = -1$, vilket ger oss nollstället $z_1 = -1 + j$. Eftersom $g(z)$ har reella koefficienter måste då även $z_2 = -1 - j$ vara ett nollställe till $g(z)$. Faktorsatsen ger vidare att $(z - z_1)(z - z_2)$ är en faktor i $g(z)$. Vi får;

$$(z - z_1)(z - z_2) = (z + 1 - j)(z + 1 + j) = (z + 1)^2 + 1 = z^2 + 2z + 2$$

Med hjälp av t.ex. polynomdivision får vi sedan att;

$$g(z) = (z^2 + 2z + 2)(3z + 2)$$

så det sista nollstället till $g(z)$ är $z_3 = -2/3$.

(b) Faktoruppdela $g(z)$ i reella polynom av så låg grad som möjligt. (1p)

Lösning: Av ovanstående lösning av deluppgift a) framgår att $g(z) = (z^2 + 2z + 2)(3z + 2)$