Lösningsförslag till tentamen i Linjär algebra, 3.7 hp, LMA212 för DA¨I1 och EI1, 20171221,14.00-18.00

tel 031 772 5892/0708 948 456. Lärare: Reimond Emanuelsson

1. (a)
$$z = \frac{5+2j}{3+7j} = \frac{15+14+j(6-35)}{3^2+7^2} = \frac{29(1-j)}{58} = \frac{1}{2}(1-j).$$
(b) $|z| = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (c) $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}$. (d) $\arg z = -\frac{\pi}{4}$. 2.0p

2. som ger

(a) $\det \boldsymbol{A} = 0$. (b) Givet totalmatrisen
$$\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ som ger } \begin{cases} x = t \\ y = 3-3t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$
1.0p+1.5p

(c) En geometrisk förklaring till de tre ekvationerna i (b) samt till lösningen i (b): De tre ekvationerna är ekvationer sfär plan i $\mathbb{R}^3$ och lösningen är skärningslinjen för de tre planen. 1.5p

3. Givet matrisekvationen... $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, där $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a)
$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
Med olika rang på matriserna, så motsvarande matrisekvation saknar lösning. 0.5p

(b) MK-metoden:
$$\boldsymbol{A}^T\cdot\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 21 & 11 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^T\cdot\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
2.5p

(c) Beräkna medelfelet:
$$\eta = \frac{||\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}||}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2^2+1^2+0^2}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$
1.0p

4. Givet punkterna $P = (3;2;0)$, $Q = (1;-1;2)$ och $R = (1;2;-1)$.

(a) Arean av triangeln T med hörn i P, Q och R. Först beräknar vi
$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = (3,-6,-6).$$
$$T = \frac{||(3,-6,-6)||}{2} = \frac{9}{2} \text{ a.e.}$$
2.0p

(b) En ekvation för planet Π, som innehåller punkterna P, Q och R: Normalvektor är $\boldsymbol{n} = (-1,2,2)$ så ekvationen ges av
$$\boldsymbol{n}\cdot((x,y,z)-\overrightarrow{OP}) = (-1,2,2)\cdot((x,y,z)-(3,2,0)) = -x+2y+2z-1 = 0.$$
2.0p

(c) Linjen $L:\ (x,y,z) = (2,0,1)t + (1,0,1)$, $t\in\mathbb{R}$ ligger i planet Π omm
$$0 = -x+2y+2z-1 = -(2t+1)+2(t+1)-1 = 0$$
vilket stämmer. 1.5p

5. Givet punkterna $O = (0;0;0)$, $P_1 = (2;5;14)$, $P_2 = (11;-10;2)$ och $P_3 = (10;10;-5)$.

(a)
$$||\overrightarrow{OP_1}|| = \sqrt{2^2+5^2+14^2} = 15,\ ||\overrightarrow{OP_2}|| = \sqrt{11^2+10^2+(-2)^2} = 15,\ ||\overrightarrow{OP_3}|| = \sqrt{10^2+10^2+(-5)^2} = 15.$$
$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3} = 0,\ \overrightarrow{OP_3}\cdot\overrightarrow{OP_1} = 0.$$
2.0p

(b) Punkterna utgör hörnen i en kub (enligt a)). Bestäm koordinaterna för kubens övriga hörn:
$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{OP_4} = \overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2} = (13,-5,16) & P_4 = (13;-5;16) \\ \overrightarrow{OP_5} = \overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_3} = (12,15,9) & P_5 = (12;15;9) \\ \overrightarrow{OP_6} = \overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3} = (21,0,-3) & P_6 = (21;0;-3) \\ \overrightarrow{OP_7} = \overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3} = (23,5,11) & P_7 = (23;5;11) \end{array}$$
2.0p

6. Polynomet $f(z) = z^2+(4-2j)z+(3-4j)$ är givet.
$$f(z) = z^2+(4-2j)z+(3-4j) = \{\text{K.K.}\} = (z+2-j)^2$$

(a)

$$f(z) = (z + 2 - j)^2 = 0 \Longleftrightarrow z = -2 + j$$

3.0p

(b) Faktorisering av $f(z) = (z + 2 - j)^2$ I polynom av grad 1. 1.0p

7. Polynomet $g(z) = z^4 + 2z^3 + 26z^2 + 50z + 25$ har ett rent imaginärt nollställe.

(a) Lös ekvationen $g(z) = 0$: Sätt $z = b\jmath$. Det ger

$$b^4 - 2ib^3 - 26b^2 + 50ib + 25 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} b^4 - 26b^2 + 25 = 0 \\ -2b^2 + 50 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow b = \pm 5.$$

Eftersom polynomet är reellt är $\pm 5j$ nollställen och således är $z^2 + 25$ en faktor:

$$g(z) = (z^2 + 5)(z^2 + 2z + 1) = (z^2 + 25)(z + 1)^2 \Rightarrow z = \pm 5j \text{ eller } z = -1.$$

3.0p

(b) Faktorisering $g(z)$ i reella polynom enligt ovan. 1.0p