



## Chalmers Tekniska Högskola

### Lösningförslag till Dugga 2 för DAI1 och EI1, LMA 212, 20131007, 8.00-10.00

1. (a) Beräkna determinanterna av matriserna  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  och  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ...

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 7 = 35 \text{ och } \det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = adf \Rightarrow$$

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = 35adf.$$

1.5 p

- (b)
- Radbyte (ERM1) ger teckenändring på determinanten.
  - Multiplikation av en rad med ett tal  $\neq 0$  (ERM2) ändrar determinantens värde med samma faktor.
  - Multiplikation av en rad med ett tal som sedan adderas till en annan rad (ERM3) ändrar inte på determinantens värde.
- 1.5 p
2. Vilka samband gäller (är sanna) respektive gäller inte, för alla vektorer  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  och  $\mathbf{c}$  i  $\mathbb{R}^3$ ? 2 poäng om alla svar är riktiga och 1 poäng för 1 fel.

(a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ sant	(b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ falskt	(c) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ sant
(d) $0 \leq \frac{ \mathbf{a} \times \mathbf{b} }{ \mathbf{a}  \cdot  \mathbf{b} }$ , $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ sant	(e) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} =  \mathbf{a} ^2$ falskt	(f) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ sant

2.0 p

3. Givet två vektorer  $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$  och  $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$ .

- (a) Skalärprodukten  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$  i komponenterna ovan. 1.0 p  
 (b) Vektorprodukten

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2)$$

i komponenterna ovan.

2.0 p

4. Trippel skalär produkt (trippelprodukt) är  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ . är givna.

3.0 p

- (a) Bestäm arean av triangeln med hörn i  $P$ ,  $Q$  och  $R$ ...

$$\overrightarrow{PQ} = (3, 1, 4), \overrightarrow{PR} = (2, 5, 7) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-13, -13, 13) \Rightarrow$$

$$T = \frac{13|(-1, -1, 1)|}{2} = \frac{13\sqrt{3}}{2}$$

1.5 p

- (b) Normalvektor är  $\mathbf{n} = (1, 1, -1)$ . En ekvation för planet som innehåller punkterna  $P$ ,  $Q$  och  $R$  är

$$\mathbf{n} \cdot ((x, y, z) - \overrightarrow{OP}) = (1, 1, -1) \cdot ((x, y, z) - (1, 1, 2)) = x + y - z = 0.$$

1.5 p

- (c) Volymen av tetraedern som har hörn i  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  och  $S$ . Vektorn  $\overrightarrow{PS} = (5, 6, 5)$  så att volymen blir

$$V = 13 \cdot \frac{|(-1, -1, 1) \cdot (5, 6, 5)|}{6} = \frac{78}{6} = 13$$

2.0 p