Lösningsförslag tll Dugga/Baskunskapstentamen vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212, för DAI och EI, måndag e.m. 20160104

Inga hjälpmedel! Ansvarig lärare Reimond Emanuelsson, tel 031 772 5888/031 772 5892

1. (a)

$$\cos\theta = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \theta = 120^\circ.$$

(b)

$$\sin\theta = \frac{|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{6}{12} \Longleftrightarrow \begin{cases} \theta = 30^\circ \\ \text{eller} \\ \theta = 150^\circ \end{cases}$$

5p

2. $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ och $\operatorname{Rang} \boldsymbol{A} = n$. 4p

3. Givet matriserna $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{A}_v^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a)

$$\boldsymbol{A}_v^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Lös matrisekvationenerna...

$$\boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_v^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

och

$$\boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_v^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$\boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{Stämmer!}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Stämmer inte!}$$

(d) Förklaring resultaten i (b) och (c): P.g.a. av $\Longrightarrow$, är den erhållna lösningen, den enda möjliga men kan vara falsk.

5p

4. Betrakta matrisekvationen

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{X}. \tag{1}$$

(a) Lös ut $\boldsymbol{X}$ i matrisekvationen i (1). Förutsätt att lämpliga matriser är inverterbara...

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{X} \Longleftrightarrow \boldsymbol{X}(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I})^{-1}$$

(b) I (a) har $\boldsymbol{A}$ 2 rader, som är antal kolonner i $\boldsymbol{X}$ och A, ty $\boldsymbol{A}$ är kvadratisk. och $\boldsymbol{B}$ har 3 rader och 2 rader. Alltså

$$\operatorname{typ} \boldsymbol{A} = 2 \times 2, \quad \operatorname{typ} \boldsymbol{B} = \operatorname{typ} \boldsymbol{X} = 3 \times 2.$$

3p

5. Givet fyra punkter P, Q, R och S i $\mathbb{R}^3$...

(a) Triangelns rea T är

$$T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|$$

(b) Tetraederns volym är

$$V = \frac{|(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{PS}|}{6}$$

(med hörn i P, Q, R och S.)

4p

6. Endast i (c) och (g) är multiplikationerna möjliga att utföra ($\operatorname{typ}(\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{B}) = 4 \times 2$ och $\operatorname{typ}(\boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}) = 2 \times 4$. Obs! $(\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}$.) 4p