Lösningsförslag till Dugga vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212 0104, för DI1 och EI1, tisdag e.m. 20171219

Examinator Reimond Emanuelsson, tel 031 772 5892, 0708 948456.
Maximal poäng 25.0

1. Följande linjära ekvationssystem, ES, är på matrisform.
   Ange rang på koefficient- och totalmatris, samt antal lösningar till respektive ES.

Rang. Koeff. matris	Rang totalmatris	Antal lösn.
2	2	∞
2	3	0
2	2	∞

3.0p

2. Givet vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ i $\mathbb{R}^3$.
   (a) $||\boldsymbol{u}||^2 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = ||\boldsymbol{u}||^2 - ||\boldsymbol{u}||\cdot||\boldsymbol{u}||\cos 0^\circ = 0$.
   (b) Förenkla... $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.
   (c) Förenkla... $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}) = 0$ ty $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$.
   (d) $||\boldsymbol{u}|| = 3$ och $||\boldsymbol{v}|| = 4$ samt $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = -6$. Vinkeln mellan vektorerna:

$$\cos\theta = \frac{-6}{3\cdot 4} \iff \theta = 120^\circ.$$

   (e)

$$||\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|| = 3\cdot 4\cdot\sin 120^\circ = 6\sqrt{3}.$$

5.0p

3. Matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$ är given.
   (a)

$$\det\boldsymbol{A} = a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2})$$

2.0p

   (b) Ekvivalenta villkor på elementen i $\boldsymbol{A}$ för att $\det\boldsymbol{A} = 0$:

$$\det\boldsymbol{A} = a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) = 0 \iff \begin{cases} a_{1,1} = 0 \text{ eller} \\ a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2} = 0. \end{cases}$$

2.0p

4. Antag att lämpliga matriser i (a) och (b) är inverterbara.
   (a) Lös ut $\boldsymbol{X}$ i matrisekvationen $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{X}$.:

$$\iff \boldsymbol{X}(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}\cdot(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}.$$

1.5p

   (b) I matrisekvationen i (a) har

$$\text{typ}\,\boldsymbol{X} = 2\times n = \text{typ}\,\boldsymbol{B},\ \text{typ}\,A = 4\times 4 \Longrightarrow n = 4.$$

   $\text{typ}\,\boldsymbol{X} = \text{typ}\,\boldsymbol{B} = 2\times 4$ och $\text{typ}\,\boldsymbol{A} = 4\times 4$. 1.5p

   (c) Visa att...

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I})\cdot(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{I}.$$

$$(\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I})\cdot(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\cdot\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I})\cdot[\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})]^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I})\cdot[\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}]^{-1} = \boldsymbol{I}.$$

1.5p

5. Vilka samband gäller (d.v.s. är identiteter), för alla vektorer $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ i $\mathbb{R}^3$? Skriv S för de som är identiteter och F för de som inte är det. 2.0 poäng om alla svar är riktiga och 1 poäng för 1 fel.

(a) S $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$	(b) S $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})(= 0)$	(c) S $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$
(d) F $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$	(e) S $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$	(f) S $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

2.0 p

6. Låt $\boldsymbol{A}$ vara en kvadratisk matris.
   (a)

$$\det\boldsymbol{A} = ad - bc,\quad \boldsymbol{A}^{-1} \text{ existerar } \iff \det\boldsymbol{A} \neq 0,\quad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3.0p

   (b) **Bevis:**
   Element c_{kj} i position (k,j) i $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^T$ är element i position (j,k) i $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$.
   Alltså är c_{kj} =produkten av rad j i $\boldsymbol{A}$ och kolonn k i $\boldsymbol{B}$.
   Således är c_{kj} produkten av rad k i $\boldsymbol{B}^T$ och kolonn j i $\boldsymbol{A}^T$. 3.5p
   Men detta element är i position (k,j) i $\boldsymbol{B}^T\cdot\boldsymbol{A}^T$. Beviset klart