Lösningsförlag till Dugga 2 vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212, för DAI och EI, torsdag e.m. 20161013

Telefonvakt: Reimond Emanuelsson, 772 5881/5892

1. Beräkna determinanten...

$$\text{(a)}\quad |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = adf$$

$$\text{(b)}\quad |\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{(c)}\quad |\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = 6 \cdot adf.$$

3.0p

2. Givet tre vektorer $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ i $\mathbb{R}^3$. Förenkla...

   (a)
$$\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + ||\boldsymbol{b}||^2 = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} - ||\boldsymbol{b}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}.$$

   (b)
$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = 2\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}.$$

   (c)
$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}.$$

3.5p

   (a) $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$.

   Bevis:

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}) = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}^{-1}) \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \text{ och}$$

$$(\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}) \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot (\boldsymbol{A}^{-1}) \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$$

   (b)
$$(\boldsymbol{A}^{-1})^T \cdot \boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1})^T = \boldsymbol{I}^T = \{\boldsymbol{I} \text{ är symmetrisk.}\} = \boldsymbol{I}.$$
$$\boldsymbol{A}^T \cdot (\boldsymbol{A}^{-1})^T = (\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A})^T = \boldsymbol{I}^T = \{\boldsymbol{I} \text{ är symmetrisk.}\} = \boldsymbol{I}.$$

4.0p

3. Givet punkterna P, Q, R och S, där de tre första punkterna inte ligger på en gemensam linje och den fjärde inte ligger i samma plan, som de tre första.

   (a) Ett uttryck för arean
$$T = \frac{1}{2}\,||\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}||$$

   (b) Volymen av tetraedern
$$V = \frac{|\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{6}.$$

   (c) Trippelskalärprodukten $= 0$ eftersom $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ och skalärprodukten $= 0$ för vinkelräta vektorer.

5.5p